

---

LLISTAT D'EXERCICIS DE  
MATEMÀTIQUES.

---

Hebert Pérez Roses [hebert.perez@matematica.udl.cat](mailto:hebert.perez@matematica.udl.cat),  
Jordi Pujolàs Boix [jpujolas@matematica.udl.cat](mailto:jpujolas@matematica.udl.cat),  
Maite Grau Montaña [mtgrau@matematica.udl.cat](mailto:mtgrau@matematica.udl.cat).

Escola Politècnica Superior  
Universitat de Lleida



# Índex

1	Expressions algebraiques, equacions i polinomis	3
2	Trigonometria plana	7
3	Funcions	11
4	Derivació	15
5	Integració	19
6	Geometria analítica plana	23
7	Còniques	27
8	Àlgebra lineal	31



# Capítol 1

## Expressions algebraiques, equacions i polinomis

1.1 Eliminar l'arrel del denominador i simplificar.

(a)  $\frac{10}{\sqrt{25}}$

(b)  $\frac{12}{\sqrt{12}}$

(c)  $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$

(d)  $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$

(e)  $\frac{2x}{\sqrt{12}} - \frac{y}{\sqrt{3}}$

**Sol.-** (a) 2, (b)  $\sqrt{12}$ , (c)  $\frac{\sqrt{x^2+x+\sqrt{x+1}}}{x+1}$ , (d)  $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$ , (e)  $\frac{\sqrt{3}}{3}(x-y)$ .

1.2 Calcular els logaritmes següents.

(a)  $\log_2 8$

(b)  $\log_2 32$

(c)  $\log_{10} \frac{1}{100}$

(d)  $\log_2 10 \cdot \log_{10} 64$

(e)  $\log_{10} 1$

(f)  $\ln 1$

- (g)  $\ln 0$   
 (h)  $\ln 3 \cdot \log_3 e$   
 (i)  $\log_2 \sqrt{8}$

**Sol.-** (a) 3, (b) 5, (c)  $-2$ , (d) 6, (e) 0, (f) 0, (g) no existeix, (h) 1, (i)  $3/2$ .

1.3 Simplificar les expressions següents.

- (a)  $(x^2 + 5x + 6)(x^2 - 1)$   
 (b)  $\frac{(x^2 + 5x + 6)(x^2 - 1)}{x^2 + x - 2}$   
 (c)  $(x + 3)(x^2 - 8x + 15)$   
 (d)  $\frac{(x + 3)(x^2 - 8x + 15)}{9 - x^2}$   
 (e)  $(x - 1)^3$   
 (f)  $\frac{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1}{(1 - x)}$   
 (g)  $\sqrt{x^5y^3} - \sqrt{x^3y^5} + 3\sqrt{xy}$   
 (h)  $(a + b/2)^4 - (2a - b)^3$

**Sol.-** (a)  $x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 = (x + 3)(x + 2)(x - 1)(x + 1)$ , (b)  $(x + 3)(x + 1)$  per  $x \neq -2$  i  $x \neq 1$ , (c)  $x^3 - 5x^2 - 9x + 45$ , (d)  $5 - x$  per  $x \neq -3$  i  $x \neq 3$ , (e)  $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ , (f)  $-x^3 + 3x^2 - 3x + 1$  per  $x \neq 1$ , (g)  $(x^2y - xy^2 + 3)\sqrt{xy}$ , (h)  $a^4 + 2a^3b - 8a^3 + (3a^2b^2)/2 + 12a^2b + (ab^3)/2 - 6ab^2 + b^4/16 + b^3$ .

1.4 Resoldre les equacions quadràtiques següents.

- (a)  $x^2 - 11x + 30 = 0$   
 (b)  $x^2 + 5x/2 - 3/2 = 0$   
 (c)  $x^2 - 5x/6 + 1/6 = 0$   
 (d)  $x^2 - 2x/5 + 1/25 = 0$   
 (e)  $9x^2 + 6x + 1 = 0$   
 (f)  $9x^2 + 4 = 0$

**Sol.-** (a)  $x = 5$  i  $x = 6$ , (b)  $x = 1/2$  i  $x = 3$ , (c)  $x = 1/2$  i  $x = 1/3$ , (d)  $x = 1/5$ , (e)  $x = -1/3$ , (f) cap solució.

1.5 Resoldre les equacions biquadrades següents.

(a)  $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

(b)  $x^4 - 32x^2 + 240 = 0$

(c)  $36x^4 - 576 = 0$

(d)  $2x^4 + 10 = 0$

**Sol.-** (a)  $x = \pm 3$  i  $x = \pm 4$ , (b)  $x = \pm 2\sqrt{3}$  i  $x = \pm 2\sqrt{5}$ , (c)  $x = \pm 2$ , (d) cap solució.

1.6 Resoldre les equacions següents, utilitzant les propietats de les potències i els logaritmes.

(a)  $\frac{3^x}{9} = 243$

(b)  $5\sqrt[5]{125^{2x}} = \left(\frac{1}{25}\right)^{3x-1}$

(c)  $7^{x^2-5x+6} = 1$

(d)  $4^{x+1} + 2^{x+3} - 320 = 0$

(e)  $e^{2x-1} = (\sqrt[4]{2})^3$

(f)  $\log(5x+4) - \log 2 = \frac{1}{2} \log(x+4)$

**Sol.-** (a)  $x = 7$ , (b)  $x = 5/36$ , (c)  $x = 2$  i  $x = 3$ , (d)  $x = 3$ , (e)  $x = \frac{4+3\ln 2}{8}$ , (f)  $x = 0$  i  $x = 36/25$ .

1.7 Resoldre les inequacions següents.

(a)  $2x - 5 \geq 0$

(b)  $10 - x \leq 3 - 2x$

(c)  $x^2 - 11x + 30 < 0$

(d)  $x^2 - 11x + 30 > 0$

(e)  $9x^2 + 6x + 1 < 0$

(f)  $x^4 - 25x^2 + 144 \leq 0$

**Sol.-** (a)  $x \geq 5/2$ , (b)  $x \leq -7$ , (c)  $5 < x < 6$ , (d)  $x \in (-\infty; 5) \cup (6; \infty)$ , (e) cap solució, (f)  $x \in [-4; -3] \cup [3; 4]$ .

1.8 Dividir el polinomi  $p(x)$  pel polinomi  $m(x)$ , i donar en cada cas el quocient  $q(x)$  i la resta  $r(x)$ .

- (a)  $p(x) = 9x^3 - 9x^2 + 4x - 4$ ,  $m(x) = x - 1$   
 (b)  $p(x) = x^4 - 25x^2 + 144$ ,  $m(x) = x^2 + x - 12$   
 (c)  $p(x) = 16x^4 - 25x^2 + 144$ ,  $m(x) = 2x - 12$   
 (d)  $p(x) = 16x^4 - 25x^2 + 144$ ,  $m(x) = x + 12$   
 (e)  $p(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x - 3$ ,  $m(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$   
 (f)  $p(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 4x - 5$ ,  $m(x) = x^2 + 1$

**Sol.-** (a)  $q(x) = 9x^2 + 4$ ,  $r(x) = 0$ ; (b)  $q(x) = x^2 - x - 12$ ,  $r(x) = 0$ ; (c)  $q(x) = 8x^3 + 4x^2 - 21x/2 - 21/4$ ,  $r(x) = 555/4$ ; (d)  $q(x) = 16x^3 - 16x^2 - 9x + 9$ ,  $r(x) = 135$ ; (e)  $q(x) = x^2 + 1$ ,  $r(x) = 0$ ; (f)  $q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$ ,  $r(x) = 3x - 2$ .

1.9 Determinar  $a$  i  $b$  perquè  $x = 3$  sigui una arrel doble de  $p(x) = x^3 + ax^2 + 7x + b$ .

**Sol.-**  $a = -17/3$ ,  $b = 3$ .

1.10 En cada cas, descompondre el polinomi  $p(x)$  en factors irreductibles.

- (a)  $p(x) = x^2 - 11x + 30$   
 (b)  $p(x) = x^4 - 25x^2 + 144$   
 (c)  $p(x) = 5x^4 + 5x^3 - 25x^2 + 5x - 30$   
 (d)  $p(x) = 5x^5 - 10x^4 + 20x^3 - 40x^2 + 15x - 30$

**Sol.-** (a)  $p(x) = (x - 5)(x - 6)$ , (b)  $p(x) = (x - 3)(x - 4)(x + 3)(x + 4)$ ,  
 (c)  $p(x) = 5(x^2 + 1)(x + 3)(x - 2)$ , (d)  $p(x) = 5(x^2 + 1)(x^2 + 3)(x - 2)$ .

1.11 Calcular el màxim comú divisor dels polinomis següents.

- (a)  $p(x) = x^4 - 16$ ,  $q(x) = x^2 - 4$   
 (b)  $p(x) = 15x^2 - 60$ ,  $q(x) = 3x^2 - 12x + 12$   
 (c)  $p(x) = x^4 - 2x^3 - 14x^2 - 2x - 15$ ,  $q(x) = x^3 - 7x^2 - 4x + 28$   
 (d)  $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ ,  $q(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$

**Sol.-** (a)  $x^2 - 4$ , (b)  $3x - 6$ , (c)  $1$ , (d)  $x^2 + 1$ .



# Capítol 2

## Trigonometria plana

2.1 Convertir els angles següents, expressats en graus, a radians.

- (a)  $90^\circ$
- (b)  $270^\circ$
- (c)  $360^\circ$
- (d)  $45^\circ$
- (e)  $60^\circ$
- (f)  $120^\circ$
- (g)  $180^\circ$
- (h)  $20^\circ$
- (i)  $380^\circ$

**Sol.-** (a)  $\pi/2$ , (b)  $3\pi/2$ , (c)  $2\pi$ , (d)  $\pi/4$ , (e)  $\pi/3$ , (f)  $2\pi/3$ , (g)  $\pi$ , (h)  $\pi/9$ , (i)  $\pi/9$ .

2.2 Convertir els angles següents, expressats en radians, a graus.

- (a)  $2\pi/9$
- (b)  $\pi/10$
- (c)  $3\pi/10$
- (d)  $5\pi/4$
- (e)  $9\pi/4$

**Sol.-** (a)  $40^\circ$ , (b)  $18^\circ$ , (c)  $54^\circ$ , (d)  $225^\circ$ , (e)  $45^\circ$ .

2.3 Calcular les raons trigonomètriques dels angles següents.

- (a)  $135^\circ$
- (b)  $120^\circ$
- (c)  $330^\circ$
- (d)  $240^\circ$

**Sol.-** (a)  $\sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\cos 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\tan 135^\circ = -1$ ,  $\cot 135^\circ = -1$ ; (b)  $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ ,  $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$ ,  $\cot 120^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ; (c)  $\sin 330^\circ = -\frac{1}{2}$ ,  $\cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\tan 330^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $\cot 330^\circ = -\sqrt{3}$ ; (d)  $\sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\cos 240^\circ = -\frac{1}{2}$ ,  $\tan 240^\circ = \sqrt{3}$ ,  $\cot 240^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

2.4 Determinar l'angle  $\alpha$  en cada cas, en graus i en radians.

- (a)  $\sin \alpha = 1/3$ ,  $\alpha < 90^\circ$
- (b)  $\cos \alpha = -3/5$ ,  $\pi/2 < \alpha < \pi$
- (c)  $\tan \alpha = 2$ ,  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$
- (d)  $\cot \alpha = -1$ ,  $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

**Sol.-** (a)  $\alpha = 19,47^\circ$ , (b)  $\alpha = 126,9^\circ$ , (c)  $\alpha = 243,43^\circ$ , (d)  $\alpha = 315^\circ$ .

2.5 Calcular l'altura de l'edifici representat en la Figura 2.1.

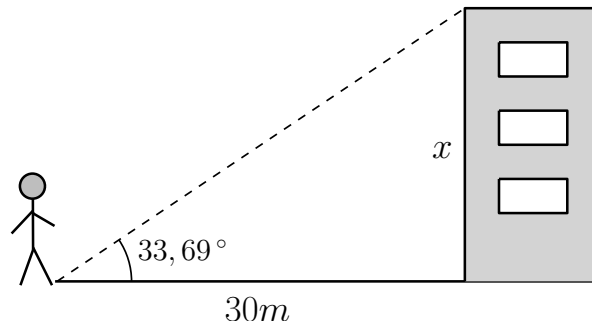


Figura 2.1: Calcular l'altura de l'edifici.

**Sol.-**  $20m$ .

2.6 Simplificar les expressions següents.

- (a)  $\frac{\sin \alpha}{\tan \alpha}$

- (b)  $\sqrt{1 - \sin \alpha} \sqrt{1 + \sin \alpha}$   
(c)  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$   
(d)  $\cos^3 \alpha + \cos^2 \alpha \sin \alpha + \cos \alpha \sin^2 \alpha + \sin^3 \alpha$   
(e)  $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha}$

**Sol.-** (a)  $\cos \alpha$ , (b)  $\cos \alpha$ , (c)  $-\cos 2\alpha$ , (d)  $\sin \alpha + \cos \alpha$ , (e)  $1 + \sin \alpha$ .

2.7 Determinar si les identitats següents són verdaderes o falses.

- (a)  $\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta} = \tan \alpha \tan \beta$   
(b)  $\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta = \sin^2 \beta - \cos^2 \alpha$   
(c)  $\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$   
(d)  $\tan \alpha + \cot \alpha = 2 \cos 2\alpha$

**Sol.-** (a) verdadera, (b) verdadera, (c) verdadera, (d) falsa.

2.8 Resoldre les següents equacions trigonomètriques.

- (a)  $\cos 2x = 2 \sin 2x$   
(b)  $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$   
(c)  $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$   
(d)  $2 \cos^2 x + 3 \cos x = 2$

**Sol.-** (a)  $x = 0,074\pi + 2k\pi$  i  $x = 1,074\pi + 2k\pi$ , (b)  $x = 2\pi/3 + 2k\pi$  i  $x = 4\pi/3 + 2k\pi$ , (c)  $x = \pi/3 + 2k\pi$  i  $x = 4\pi/3 + 2k\pi$ , (d)  $x = \pi/3 + 2k\pi$  i  $x = 5\pi/3 + 2k\pi$ .



# Capítol 3

## Funcions

- 3.1 Analitzar el gràfic de la Figura 3.1 i determinar si representa una funció. En cas afirmatiu, donar el seu domini i el seu recorregut.

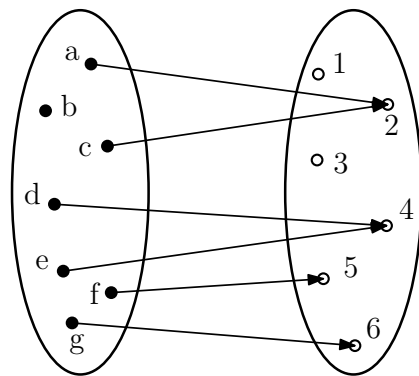


Figura 3.1: Relació entre dos conjunts

**Sol.-** És funció. Domini:  $\{a, c, d, e, f, g\}$ , Recorregut:  $\{2, 4, 5, 6\}$ .

- 3.2 Analitzar el gràfic de la Figura 3.2 i determinar si representa una funció. En cas afirmatiu, donar el seu domini i el seu recorregut.

**Sol.-** No és funció.

- 3.3 Determinar el domini i el recorregut de les funcions següents, definides en  $\mathbb{R}$ .

(a)  $f(x) = 5x^2$

(b)  $f(x) = 5x^2 + 3$

(c)  $f(x) = -5x^2 + 3$

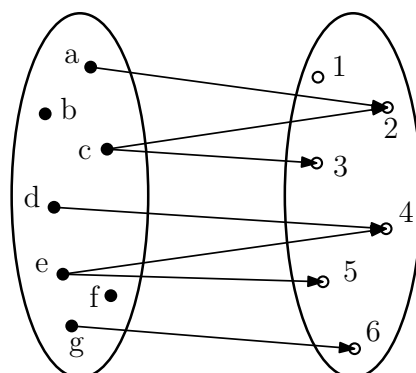


Figura 3.2: Relació entre dos conjunts

(d)  $f(x) = x^2 + 5x + 12$

(e)  $f(x) = 2 \sin x$

(f)  $f(x) = \sin x - 1$

(g)  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

(h)  $f(x) = \sqrt{x - 2}$

(i)  $f(x) = \frac{1}{x + 1}$

(j)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

**Sol.-** (a) Domini:  $\mathbb{R}$ , Recorregut:  $[0; +\infty)$ ; (b) Domini:  $\mathbb{R}$ , Recorregut:  $[3; +\infty)$ ; (c) Domini:  $\mathbb{R}$ , Recorregut:  $(-\infty; 3]$ ; (d) Domini:  $\mathbb{R}$ , Recorregut:  $[23/4; +\infty)$ ; (e) Domini:  $\mathbb{R}$ , Recorregut:  $[-2; 2]$ , (f) Domini:  $\mathbb{R}$ , Recorregut:  $[-2; 0]$ ; (g) Domini:  $\mathbb{R} - \{0\}$ , Recorregut:  $[-0, 217234; 1]$ ; (h) Domini:  $[2; +\infty)$ , Recorregut:  $[0; +\infty)$ ; (i) Domini:  $\mathbb{R} - \{1\}$ , Recorregut:  $\mathbb{R} - \{0\}$ ; (j) Domini:  $\mathbb{R}$ , Recorregut:  $(0; 1]$ .

3.4 Un noi llança una pilota a l'aire, que aconseguix una altura màxima de 5 metres, i cau a 10 metres de distància del noi. Sabem que la trajectòria de la pilota és una funció quadràtica  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Suposant que el noi és a l'origen del sistema de coordenades, i que la pilota es llança en direcció de l'eix  $x$ , determinar els valors de  $a$ ,  $b$ , i  $c$ .

**Sol.-**  $f(x) = -x^2/5 + 2x$ .

3.5 Calcular els límits següents.

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1)$   
 (b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x^4 + x^2 - x + 1)$   
 (c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$   
 (d)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 11x + 30}{x - 5}$   
 (e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x + 1} - \frac{x^3}{x^2 + 1} \right)$   
 (f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 5} - x + 5)$   
 (g)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2} - x^2)$   
 (h)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{x^2 + 1} - \frac{3x^2}{x - 3} \right)$   
 (i)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1)$   
 (j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x}$   
 (k)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}$

**Sol.-** (a) 1, (b)  $-\infty$ , (c) 2, (d)  $-1$ , (e)  $-1$ , (f) 5, (g)  $1/2$ , (h)  $-\infty$ , (i) 0, (j) 0, (g) no existeix.

3.6 Calcular el valor de  $m$  per a satisfer les següents condicions.

- (a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1 - mx)(2x + 3)}{x^2 - 4} = 6$   
 (b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + mx - 6}{3x - 9}$  sigui finit

**Sol.-** (a)  $m = -3$ , (b)  $m = -1$ .

3.7 Estudiar les asímptotes de les funcions següents i dibuixar-les.

- (a)  $f(x) = \frac{x^3}{x - 1}$   
 (b)  $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1}$   
 (c)  $f(x) = \frac{4x - 2}{x^2 - 2x}$

$$(d) f(x) = \frac{4x}{x^2 - 4}$$

$$(e) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$$

$$(f) f(x) = \frac{3x^2 + 2x}{x - 2}$$

$$(g) f(x) = \log(x - 5)$$

$$(h) f(x) = e^x - 1$$

$$(i) f(x) = e^x + x$$

3.8 Dibuixar les següents funcions.

$$(a) f(x) = (x - 1)^2$$

$$(b) f(x) = (x - 1)^2 + 5$$

$$(c) f(x) = (x + 1)^3$$

$$(d) f(x) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(e) f(x) = e^x \cos x$$



# Capítol 4

## Derivació

4.1 A partir de la definició, determineu la derivada de les funcions següents:

(a)  $3x^2 + 2x - 8$

(b)  $\sqrt{5 - 3x}$

(c)  $\frac{2t + 1}{t - 3}$

(d)  $\frac{2 + x}{x^2}$

**Sol.-** (a)  $6x + 2$ , (b)  $\frac{-3}{2\sqrt{5 - 3x}}$ , (c)  $\frac{-7}{(t - 3)^2}$ , (d)  $\frac{-(x + 4)}{x^3}$ .

4.2 Deriveu les següents funcions algebraiques:

(a)  $x^2\sqrt{x}$

(b)  $3x^2 + 4x$

(c)  $4x\sqrt{x + 1}$

(d)  $\frac{4x}{\sqrt{x + 1}}$

**Sol.-** (a)  $\frac{5}{2}x\sqrt{x}$ , (b)  $6x + 4$ , (c)  $\frac{6x + 4}{\sqrt{x + 1}}$ , (d)  $\frac{2x + 4}{(x + 1)^{3/2}}$ .

4.3 Deriveu les següents composicions de funcions:

(a)  $(x^2 - 2x)^4$

(b)  $4x\sqrt{x^2 + 1}$

(c)  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5 - x}}$

$$(d) (7 - \sqrt{x-2})^2$$

**Sol.-** (a)  $8(x-1)(x^2-2x)^3$ , (b)  $\frac{8x^2+4}{\sqrt{x^2+1}}$ , (c)  $\frac{5}{2(5-x)\sqrt{5x-x^2}}$ , (d)  $1 - \frac{7}{\sqrt{x-2}}$ .

4.4 Deriveu les següents funcions:

$$(a) \cos\left(\frac{\pi}{2}x^3\right)$$

$$(b) \tan^3\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$(c) 4 \sin\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$(d) (7 - \sqrt{x-2})^2$$

$$(e) \ln(\sqrt{x+5})^3$$

$$(f) x \ln(x+7) - x$$

$$(g) e^{2-x^2}$$

$$(h) \frac{x}{e^{8x^2-8}}$$

$$(i) e^{-3x} \cos(3x)$$

$$(j) \sqrt{4 + \ln^2(-3x)}$$

**Sol.-**(a)  $-3\frac{\pi}{2}x^2 \sin(\frac{\pi}{2}x^3)$ , (b)  $\frac{3}{2} \tan^2(\frac{x}{2}) \sec^2(\frac{x}{2})$ , (c)  $\frac{8}{(x+1)^2} \cos(\frac{x-1}{x+1})$ ,  
 (d)  $1 - \frac{7}{\sqrt{x-2}}$ , (e)  $\frac{3}{2(x+5)}$ , (f)  $\ln(x+7) - \frac{7}{x+7}$ , (g)  $-2xe^{2-x^2}$ , (h)  
 $(1 - 16x^2)e^{8-8x^2}$ , (i)  $-3e^{-3x}(\sin(3x) + \cos(3x))$ , (j)  $\frac{\ln(-3x)}{x\sqrt{4 + \ln^2(-3x)}}$ .

4.5 Trobeu la derivada  $n$ -èsima de  $f(x) = \ln(2x+1)$ .

**Sol.-**  $f^n(x) = (-1)^{n+1} \frac{2^n(n-1)!}{(2x+1)^n}$ .

4.6 Doneu l'equació de la recta tangent a  $f(x)$  en el punt  $x = x_0$  si

$$(a) f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x^3\right), x_0 = 1,$$

$$(b) f(x) = x \ln(x+7) - x, x_0 = 0,$$

$$(c) f(x) = x^3 - 2x - 1, x_0 = 2.$$

**Sol.-** (a)  $y = -\frac{3\pi}{2}x + \frac{3\pi}{2}$ , (b)  $y = (\ln(7) - 1)x$ , (c)  $y = 10x - 17$ .

4.7 Representeu gràficament les funcions  $\frac{x^2}{2x-1}$  i  $\frac{x^3}{x^2-1}$ .

**Sol.-**

4.8 Trobeu els valors de  $x$  on  $f(x)$  i  $g(x)$  tenen tangents paral·leles, per a

(a)  $f(x) = x^3 - 2x - 1$ ,  $g(x) = x^2 + 3x + 4$ ,

(b)  $f(x) = \frac{4^{x+1}}{\ln(4)} + \frac{2^{x+3}}{\ln(2)}$ ,  $g(x) = 320x$ ,

(c)  $f(x) = \frac{e^{2x-1}}{2}$ ,  $g(x) = 2^{\frac{3}{4}}x$ .

**Sol.-** (a)  $x = \frac{5}{3}, -1$ , (b)  $x = 3$ , (c)  $x = \frac{4+3\ln(2)}{8}$ .

4.9 Una partícula es mou seguint una trajectòria  $x(t)$ , on  $t$  representa el temps. Determineu els tres intervals on la posició, la velocitat i l'acceleració són  $\geq 0$  respectivament, si

(a)  $x(t) = \ln(t^2 + 3)$ ,

(b)  $x(t) = t^2 e^{-3t}$ .

**Sol.-** (a) la posició sempre és positiva,  $t \geq 0$ ,  $t \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ , (b) la posició sempre és positiva,  $t \in [0, \frac{2}{3}]$ ,  $t \notin [\frac{2-\sqrt{2}}{3}, \frac{2+\sqrt{2}}{3}]$ .

4.10 Un far està a 2 km de la costa en línia recta. El seu mecanisme gira a una velocitat constant de  $\frac{\pi}{10}$  radians, però naturalment la llum que impacta a l'ull d'un observador es mou més depressa quan més lluny del far es troba. Et trobes a 3 km en línia recta del punt de la costa més proper al far. A quina velocitat es mou el raig de llum quan t'il·lumina?

**Sol.-**  $\frac{13\pi}{45} \cong 0,9$  km/s.

4.11 Volem fabricar una piscina de base quadrada i una àrea superficial de 48 metres quadrats. Trobeu les mides que maximitzen la quantitat d'aigua que contindrà.

**Sol.-** La piscina ha de tenir una profunditat de 4 metres i una llargada de 16.

4.12 Trobeu el radi que ha de tenir un recipient cilíndric tapat de volum  $V$  fixat per tal de minimitzar la seva superfície.

**Sol.-**  $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ .



# Capítol 5

## Integració

5.1 Trobeu una primitiva (o antiderivada) de les funcions següents:

(a)  $3x^2 + 2x - 8$

(b)  $\sqrt{5 - 3x}$

(c)  $\frac{3}{t^3} - \frac{5}{t^6}$

(d)  $5x - \sqrt{3x}$

**Sol.-** (a)  $x^3 + x^2 - 8x + C$ , (b)  $-\frac{2}{9}(5 - 3x)^{3/2}$ , (c)  $\frac{1}{t^5} - \frac{3}{2t^2}$ ,

(d)  $-\frac{2\sqrt{3}}{3}x^{3/2} + \frac{5x^2}{2}$ .

5.2 Calculeu les següents integrals indefinides:

(a)  $\int \frac{5}{\sqrt{x-3}} dx$

(b)  $\int -6x^2(3 - 2x^3)^4 dx$

(c)  $\int (3 - 2x)^3 dx$

(d)  $\int \frac{12x^2 + 3}{4x^3 + 3x} dx$

(e)  $\int 2x e^{x^2} dx$

(f)  $\int -\frac{7}{x^2} \cos\left(\frac{7}{x}\right) dx$

**Sol.-** (a)  $10\sqrt{(x-3)} + C$ , (b)  $\frac{(3-2x^3)^5}{5} + C$ , (c)  $-\frac{(3-2x)^4}{8} + C$ ,  
 (d)  $\ln(4x^3 + 3x) + C$ , (e)  $e^{x^2} + C$ , (f)  $\sin(\frac{7}{x}) + C$ .

5.3 Integreu les següents funcions exponencials:

- (a)  $\int e^{2x-5} dx$   
 (b)  $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$   
 (c)  $\int e^x \sqrt{1-e^x} dx$   
 (d)  $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$   
 (e)  $\int e^{\cos(7x)} \sin(7x) dx$   
 (f)  $\int \frac{e^{5x}}{e^{5x} + 4} dx$

**Sol.-** (a)  $\frac{1}{2}e^{2x-5} + C$ , (b)  $2e^{\sqrt{x}} + C$ , (c)  $-\frac{2}{3}(1-e^x)^{3/2} + C$ ,  
 (d)  $\ln(e^x - e^{-x}) + C$ , (e)  $-\frac{1}{7}e^{\cos(7x)} + C$ , (f)  $\frac{1}{5} \ln(e^{5x} + 4) + C$ .

5.4 Integreu per parts:

- (a)  $\int xe^x dx$   
 (b)  $\int \ln^2(x) dx$   
 (c)  $\int \theta \cos(\theta) d\theta$   
 (d)  $\int x^2 \sin(x) dx$   
 (e)  $\int e^x \cos(x) dx$

**Sol.-** (a)  $(x-1)e^x + C$ , (b)  $x \ln^2(x) - 2x \ln(x) + 2x + C$ ,  
 (c)  $\theta \sin(\theta) + \cos(\theta) + C$ , (d)  $-x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) + 2 \cos(x) + C$ ,  
 (e)  $\frac{1}{2}e^x(\cos(x) + \sin(x)) + C$ .

5.5 Integreu per canvi de variable:

$$(a) \int \frac{x}{\sqrt{x+4}} dx$$

$$(b) \int 3x \sqrt{2x+7} dx$$

$$(c) \int \frac{x^2}{(x-2)^5} dx$$

$$(d) \int \frac{2x-3}{(x-6)^3} dx$$

**Sol.-** (a)  $\frac{2}{3}(x-8)\sqrt{x+4} + C$ , (b)  $\frac{1}{5}(2x+7)^{3/2} + (3x-7) + C$ ,  
 (c)  $\frac{-3x^2+4x-2}{6(x-2)^4} + C$ , (d)  $\frac{15-4x}{2(x-6)^2}$ .

5.6 Integreu buscant les derivades de  $\ln(x)$  i  $\arctan(x)$ :

$$(a) \int \frac{x^2+1}{x^3+x} dx$$

$$(b) \int \frac{1}{5x+4} dx$$

$$(c) \int \frac{x^2+x+1}{x^2+1} dx$$

$$(d) \int \frac{3}{x^2+5} dx$$

$$(e) \int \frac{1}{x^2+3} dx$$

$$(f) \int \frac{1}{x^2+2x+10} dx$$

**Sol.-** (a)  $\frac{1}{3} \ln(|x^3+3x|) + C$ , (b)  $\frac{1}{5} \ln(|5x+4|) + C$ , (c)  $x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$ ,  
 (d)  $\frac{3}{4} \arctan\left(\frac{x}{4}\right) + C$ , (e)  $\frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right) + C$ , (f)  $\frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x+1}{3}\right) + C$ .

5.7 Calculeu les següents integrals definides:

$$(a) \int_0^\pi \sin(x) dx$$

$$(b) \int_1^{e^2} \frac{1}{x} dx$$

$$(c) \int_2^3 \frac{5z}{1+z^2} dz$$

$$(d) \int_0^5 |2x-5| dx$$

$$(e) \int_1^4 3-|x-3| dx$$

**Sol.-** (a) 2, (b) 2, (c)  $\frac{5}{2} \ln(2)$ , (d)  $\frac{25}{2}$ , (e)  $\frac{13}{2}$ .

5.8 Calculeu l'àrea que tanquen les corbes:

(a)  $y = x^2 + 2$  i  $y = -x$  entre  $x = 0$  i  $x = 1$ .

(b)  $y = x^2$  i  $y = \sqrt{x}$ .

(c)  $y = \cos(x)$  i  $y = \sin(x)$  entre dos punts de tall consecutius.

(d)  $y = 3x^3 - x^2 - 10x$  i  $y = -x^2 + 2x$ .

**Sol.-** (a)  $\frac{17}{6}$ , (b)  $\frac{1}{3}$ , (c)  $2\sqrt{2}$ , (d) 24.



# Capítol 6

## Geometria analítica plana

6.1 En quin punt del pla es tallen les següents parelles de rectes? Dibuixa les dues rectes en uns eixos coordenats i marca el punt de tall.

(a)  $3x + 5y - 16 = 0$  i  $x - 2y + 2 = 0$ .

(b)  $\frac{x + 3y}{2} = 5$  i  $4 - \frac{2x - y}{2} = 1$ .

(c)  $3x + 2y = 7$  i  $x + y = 3$ .

(d)  $x + y = 4$  i  $3x + 2y = 11$ .

(e)  $x + y = 4$  i  $3x + 3y = 12$ .

(f)  $x + y = 4$  i  $2x + 2y = 3$ .

(g)  $\frac{2x - 3y}{2} = 10x + \frac{9}{4}$  i  $\frac{x}{5} - \frac{3y}{2} = 5x + y/10$ .

(h)  $\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 - 5\lambda \end{cases}$  i  $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 3 + 4t \end{cases}$ , on  $\lambda$  i  $t$  són paràmetres reals.

**Sol.-** (a) (2, 2), (b) (4, 2), (c) (1, 2), (d) (3, 1), (e) Són rectes coincidents: tots els punts de  $x + y = 4$  pertanyen a les dues rectes. (f) Són rectes paral·leles: no es tallen en cap punt. (g) (-1/2, 3/2), (h) (7, -9).

6.2 (a) Dóna l'expressió de totes les rectes del pla que passen pel punt (3, -2).

(b) Dóna l'expressió de totes les rectes del pla que tenen pendent -2.

(c) Dóna l'expressió de totes les rectes del pla que són verticals.

(d) Dóna l'expressió de totes les rectes del pla perpendiculars a la recta  $3x - y + 4 = 0$

**Sol.-** (a)  $y = -2 + m(x - 3)$  on  $m \in \mathbb{R}$ , (b)  $y = -2x + h$  on  $h \in \mathbb{R}$ , (c)  $x = k$  on  $k \in \mathbb{R}$ , (d)  $x + 3y + h = 0$  on  $h \in \mathbb{R}$ .

6.3 Considerem els punts  $A$  i  $B$  del pla de coordenades  $A(3, 2)$  i  $B(5, 4)$ .

- (a) Calcula les coordenades del punt mig del segment  $AB$ .
- (b) Calcula les coordenades dels punts que divideixen el segment  $AB$  en tres parts iguals.
- (c) Calcula les coordenades del punt  $C$  tal que  $2\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CB}$ .
- (d) Considerem el punt  $D(-2, 3)$ . Calcula les coordenades del bari-centre del triangle format pels punts  $A$ ,  $B$  i  $D$ .
- (e) Calcula les coordenades d'un punt  $E$  tal que els punts  $A$ ,  $B$ ,  $D$  i  $E$  formi un paral·lelogram.
- (f) Quina és la distància entre els punts  $A$  i  $B$ ?
- (g) Calcula les coordenades d'un punt  $F$  tal que els punts  $A$ ,  $B$  i  $F$  formin un triangle equilàter.

**Sol.** (a)  $(4, 3)$ , (b)  $(11/3, 8/3)$  i  $(13/3, 10/3)$ , (c)  $(9, 8)$ , (d)  $(2, 3)$ , (e) pot ser  $(10, 3)$ ,  $(-4, 1)$  o bé  $(0, 5)$ , (f)  $2\sqrt{2}$  u, (g) pot ser  $(4 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$  o bé  $(4 + \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3})$ .

6.4 Donats els vectors  $\vec{u} = (2, a)$  i  $\vec{v} = (3, -2)$ , determineu el valor de  $a$  per tal que

- (a) siguin perpendiculars.
- (b) siguin paral·lels.
- (c) formin un angle de  $\pi/3$  radians.

**Sol.-** (a)  $a = 3$ , (b)  $a = -4/3$ , (c)  $a = 16 \pm 26/\sqrt{3}$ .

6.5 Considerem el triangle de vèrtexs en els punts  $P_0(3, 5)$ ,  $P_1(1, 3)$  i  $P_2(a, 10)$ . Determineu el valor de  $a$  de manera que

- (a) el triangle sigui rectangle en  $P_0$ .
- (b) el triangle sigui rectangle en  $P_1$ .
- (c) el triangle sigui rectangle en  $P_2$ .
- (d) el triangle sigui equilàter.

**Sol.-** (a)  $a = -2$ , (b)  $a = -6$ , (c) no es pot donar, (d) no es pot donar.

6.6 Donats els vectors  $\vec{u} = (5, 1)$  i  $\vec{v} = (a, 2)$ , determineu el valor de  $a$  per tal que els vectors  $\vec{v}$  i  $\vec{u} + \vec{v}$  siguin perpendiculars.

**Sol.-**  $a = -3$  o bé  $a = -2$ .

6.7 Un cotxe surt de  $A$  a 60 km/h. Dues hores després surt del mateix punt un altre cotxe a 90 km/h. A quina distància de  $A$  troba el segon cotxe al primer i quant de temps tarda a aconseguir-ho?

**Sol.-** Es troben al cap de 4 hores d'haver sortit el segon cotxe i estan a una distància de 360 km del punt  $A$ .

6.8 Determina les coordenades del punt simètric al  $(-2, 3)$  respecte la recta  $x + 2y + 1 = 0$ .

**Sol.**  $(-4, -1)$ .

6.9 Calcula les coordenades de tots els punts de la recta  $x - y = 3$  que estan a distància  $2u$  del punt  $P(3, 2)$ .

**Sol.**  $(3, 0)$  i  $(5, 2)$ .

6.10 Determina la posició relativa entre de les dues rectes  $x + 3y - 1 = 0$  i  $kx + (k - 2)y + (k + 1) = 0$ , en funció del paràmetre real  $k$ .

**Sol.-** Si  $k \neq -1$ , aleshores les dues rectes són secants. Si  $k = -1$ , les dues rectes són paral·leles.

6.11 Determina la posició relativa i calcula la distància entre les següents parelles de rectes del pla:

(a)  $x + 3y - 1 = 0$  i  $-x - 3y - 2 = 0$ ,

(b)  $2x - y + 4 = 0$  i  $x - 2 = \frac{y}{2}$ ,

(c)  $2x - y + 4 = 0$  i  $-x + 2y + 1 = 0$ ,

(d)  $3y = 2x + 1$ ,  $\frac{x - 3}{3} = \frac{y - 2}{2}$ .

**Sol.-** (a) Les dues rectes són paral·leles i estan a distància  $3/\sqrt{10}$  u.

(b) Les dues rectes són coincidents i estan a distància 0 u, (c) Les dues

rectes són secants, es tallen en el punt  $(-3, -2)$  i estan a distància 0 u.

(d) Les dues rectes són paral·leles i estan a distància  $1/\sqrt{13}$  u.

6.12 Determina l'angle entre les següents parelles de rectes del pla:

(a)  $x - y = 2$  i  $x = 1$ ,

(b)  $x - y = 2$  i  $x + y = 2$ ,

(c)  $x - y = 2$  i  $x - y = -2$ ,

(d)  $x - y = 2$  i  $x + 2y + \sqrt{3}y - 4 - \sqrt{3} = 0$ .

**Sol.-** (a)  $45^\circ$ , (b)  $90^\circ$ , (c) són rectes paral·leles, (d)  $60^\circ$ .



# Capítol 7

## Còniques

7.1 Digues quin tipus de cònica (el·lipse, paràbola o hipèrbola) es representa per cadascuna de les equacions següents i representa-la gràficament.

(a)  $4x^2 + y^2 = 1$ ,

(b)  $4x^2 - y^2 = 1$ ,

(c)  $4x^2 - y = 1$ ,

(d)  $4(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 2$ .

**Sol.-** (a) el·lipse, (b) hipèrbola, (c) paràbola, (d) el·lipse.

7.2 Representa gràficament les següents paràboles:

(a)  $y = x^2 - 3x + 2$ ,

(b)  $y = x^2 - 3x + 9/4$ ,

(c)  $y = x^2 - 3x + 3$ ,

(d)  $y = -x^2 + 3x - 2$ ,

(e)  $x = y^2 - 3y + 2$ .

7.3 Dóna l'equació de cadascuna de les circumferències següents:

(a) de centre el punt  $(3, -2)$  i radi 4,

(b) tal que un dels seus diàmetres té com extrems els punts  $(3, 5)$  i  $(-1, 2)$ ,

(c) tal que el seu centre es troba en la recta  $y = x$ , el seu radi és  $\sqrt{5}$  i passa pel punt  $(0, -3)$ ,

(d) de centre el punt  $(3, 5)$  i que passa pel punt  $(-1, 2)$ .

**Sol.-** (a)  $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$ , (b)  $(x - 1)^2 + (y - 7/2)^2 = 25/4$ ,  
 (c) pot ser  $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$  o bé  $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 5$ , (d)  
 $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$ .

7.4 Dóna l'equació de cadascuna de les còniques següents:

- (a) la circumferència inscrita al quadrat de vèrtexs  $(2, -1)$ ,  $(6, -1)$ ,  
 $(6, 3)$  i  $(2, 3)$ ,
- (b) la circumferència circumscriu al quadrat de vèrtexs  $(2, -1)$ ,  $(6, -1)$ ,  
 $(6, 3)$  i  $(2, 3)$ ,
- (c) l'el·lipse inscrita al rectangle de vèrtexs  $(1, 2)$ ,  $(-1, 2)$ ,  $(-1, -2)$ ,  
 $(1, -2)$ ,

**Sol.-** (a)  $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 4$ , (b)  $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 8$ , (c)  
 $x^2 + y^2/4 = 1$ .

7.5 En quin punt del pla es tallen les següents parelles de corbes? Dibuixa les dues corbes en uns eixos coordenats i marca els punts de tall, si n'hi ha.

- (a) la circumferència  $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$  i la recta  $3x + y - 5 = 0$ ,
- (b) les el·lipses  $\frac{5x^2}{4} + y^2 = 1$  i  $x^2 + \frac{5y^2}{4} = 1$ ,
- (c) la hipèrbola  $x^2 - y^2 = 2$  i la paràbola  $x = y^2$ ,
- (d) la hipèrbola  $xy = 1$  i la recta  $2x - y + 1 = 0$ .

**Sol.-** (a)  $(11/5, -8/5)$  i  $(1, 2)$ , (b)  $(2/3, 2/3)$ ,  $(-2/3, 2/3)$ ,  $(2/3, -2/3)$   
 i  $(-2/3, -2/3)$ , (c)  $(2, \sqrt{2})$  i  $(2, -\sqrt{2})$ , (d)  $(-1, -1)$  i  $(1/2, 2)$ .

7.6 Determina les equacions de les rectes tangents a la circumferència  $x^2 + y^2 = 4$  que passen pel punt  $P(5/2, 0)$ . En quins punts es troben cadascuna de les rectes amb la circumferència?

**Sol.-**  $y = \frac{4}{3} \left( x - \frac{5}{2} \right)$  que es troba amb la circumferència en el punt  
 $\left( \frac{8}{5}, -\frac{6}{5} \right)$  i  $y = -\frac{4}{3} \left( x - \frac{5}{2} \right)$  que es troba amb la circumferència en el  
 punt  $\left( \frac{8}{5}, \frac{6}{5} \right)$ .

7.7 Determina l'equació de la recta tangent a la circumferència  $x^2 + y^2 = 4$  que passa pel punt  $P(1, \sqrt{3})$ .

**Sol.-**  $x + \sqrt{3}y = 4$ .

7.8 Determina les equacions de les rectes tangents a la paràbola  $y = x^2 + 2$  que passen pel punt  $P(0, 1)$ . En quins punts es troben cadascuna de les rectes amb la paràbola?

**Sol.-**  $y = 1 + 2x$  que es troba amb la paràbola en el punt  $(1, 3)$  i  $y = 1 - 2x$  que es troba amb la paràbola en el punt  $(-1, 3)$ .

7.9 Determina les equacions de les rectes tangents a la paràbola  $y^2 = 4x$  que passen pel punt  $P(-4, 0)$ . En quins punts es troben cadascuna de les rectes amb la paràbola?

**Sol.-**  $y = x/2 + 2$  que es troba amb la paràbola en el punt  $(4, 4)$  i  $y = -x/2 - 2$  que es troba amb la paràbola en el punt  $(4, -4)$ .

7.10 Determina l'equació de la recta tangent a l'el·lipse  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$  que passa pel punt  $P\left(\sqrt{2}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$ .

**Sol.-**  $y = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{2}(x - \sqrt{2})$ .

7.11 Determina les equacions de les rectes tangents a la hipèrbola  $x^2 - y^2 = 1$  que passen pel punt  $P(3/5, 0)$ . En quins punts es troben cadascuna de les rectes amb la hipèrbola?

**Sol.-**  $y = \frac{5}{4}\left(x - \frac{3}{5}\right)$  que es troba amb la hipèrbola en el punt  $\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$   
i  $y = -\frac{5}{4}\left(x - \frac{3}{5}\right)$  que es troba amb la hipèrbola en el punt  $\left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ .

7.12 Recordem que l'el·lipse és la corba formada per tots els punts del pla tals que la suma de les seves distàncies a dos punts interiors és constant. Si considerem la corba formada per tots els punts del pla tals que el producte de les seves distàncies a dos punts interiors és constant també podem obtenir un òval, que no és una cònica. Comprova que l'equació de la corba formada per tots els punts del pla tals que el producte de les seves distàncies als punts  $(1, 0)$  i  $(-1, 0)$  és constant igual a 2 és

$$((x - 1)^2 + y^2) ((x + 1)^2 + y^2) = 4,$$

i representa aquesta corba gràficament.





# Capítol 8

## Àlgebra lineal

8.1 Considerem les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcula, si és possible:  $3A$ ,  $A + B$ ,  $A - 2B$ ,  $AB$ ,  $BA$ ,  $A^2$ ,  $B^2$ ,  $A^{-1}$ ,  $B^{-1}$ ,  $A^T$ ,  $B^T$  i  $B^T A$ .

$$\text{Sol.- } 3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & 6 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 & 1 \\ 6 & 8 & 4 & 4 \\ 7 & 7 & 4 & 4 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 6 & 5 & 8 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 6 & -4 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B^T A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -5 \\ 7 & 4 & 10 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

8.2 Calcula els següents determinants:

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, (b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}, (c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}, (d) \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

**Solució.-** (a)  $-1$ , (b)  $0$ , (c)  $-4$ , (d)  $12$ .

8.3 Comprova que  $A^T = BAB^{-1}$ , on

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & \sqrt{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 7 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

8.4 Resol cadascuna de les següents equacions matricials:

$$(a) AX = B, \quad (b) XA = B^T, \quad (c) A^{-1}X = B,$$

on

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Sol.-} \quad (a) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \\ 7/2 & -1 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 6 & -2 & 9 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad (c) \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

8.5 Considerem la matriu  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Calcula  $M^{-1}$ ,  $I_2 + M + M^2 + M^3 + M^4 + \dots + M^{2014}$  i  $M^{4655}$ .

**Sol.-**  $M^{-1} = -M$ ,  $I_2 + M + M^2 + \dots + M^{2014} = M$  i  $M^{4655} = -M$ .

8.6 Determina el rang de les següents matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}.$$

**Solució.-** El rang de  $A$  és 2 i el rang de  $B$  és 2.

8.7 Determina el rang de les matrius següents segons els paràmetres:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 3 \\ 4 & 0 & -t \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2s & -1 \\ s & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} w & -1 & 1 \\ 4 & -w & 2 \\ 3w & -3 & w+1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 3/2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & -a \\ a & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & a \\ 2 & a & 3 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ m & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Sol.-** Si  $t \neq 0$  i  $t \neq 4$ ,  $\text{rg } A = 3$ ; si  $t = 0$  o bé si  $t = 4$ ,  $\text{rg } A = 2$ .  
 Si  $s \neq -1$  i  $s \neq 3/2$ ,  $\text{rg } B = 3$ ; si  $s = -1$  o bé si  $s = 3/2$ ,  $\text{rg } B = 2$ .  
 Si  $w \neq 2$  i  $w \neq -2$ ,  $\text{rg } C = 3$ ; si  $w = 2$ ,  $\text{rg } C = 1$ ; si  $w = -2$ ,  $\text{rg } C = 2$ .  
 Si  $a \neq 1$  i  $a \neq -2$ ,  $\text{rg } D = 3$ ; si  $a = 1$ ,  $\text{rg } D = 1$ ; si  $a = -2$ ,  $\text{rg } D = 2$ .  
 Si  $a \neq 0$ ,  $\text{rg } E = 3$ ; si  $a = 0$ ,  $\text{rg } E = 2$ .  
 Si  $a \neq \pm 1$ ,  $\text{rg } F = 3$ ; si  $a = \pm 1$ ,  $\text{rg } F = 2$ .  
 Si  $a \neq 0$  i  $a \neq 1$ ,  $\text{rg } G = 3$ ; si  $a = 0, 1$ ,  $\text{rg } G = 2$ .  
 Si  $m \neq 5$ ,  $\text{rg } H = 3$ ; si  $m = 5$ ,  $\text{rg } H = 2$ .

- 8.8 Els costats d'un triangle medeixen 46, 36 i 30 cm. Prenem els vèrtexs com a centre i tracem tres circumferències tangents dues a dues. Quins són els radis de les circumferències?

**Sol.-** 10 cm, 20 cm i 26 cm.

- 8.9 Escriu un sistema lineal d'equacions respecte les variables  $x$ ,  $y$  i  $z$  que tingui les solucions següents, on  $\lambda$  i  $\mu$  són paràmetres reals,  $(x, y, z) = (3 + 2\lambda - \mu, 2 + \lambda - 2\mu, 4 - \lambda + 3\mu)$ .

**Sol.-**  $x - 5y - 3z = -19$ .

- 8.10 Escriu un sistema lineal d'equacions respecte les variables  $x$ ,  $y$  i  $z$  que tingui les solucions següents, on  $\lambda$  és un paràmetre real,  $(x, y, z) = (1 + 2\lambda, -2 + \lambda, 3 - \lambda)$ .

**Sol.-**  $x + 2z = 7$ ,  $y + z = 1$ .

- 8.11 Discuteix i resol els següents sistemes lineals d'equacions, segons els valors de  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$(a) \begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 6z = -1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - 2y + 3z = 1 \\ 4x - 5y + 7z = 5 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -x + 2z = 3 \\ 3x + 2y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} -x + \lambda y + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x - 3z = -2 \end{cases} \quad (f) \begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3y + z = 3 \\ x + 2y + 5z = \lambda \end{cases}$$

**Solució.-** (a) SCD  $x = 6$ ,  $y = -2$ ,  $z = -5/2$ .

(b) SCD  $x = 1$ ,  $y = -2$ ,  $z = 3$ .

(c) SCI  $(x, y, z) = (\mu, -8 + 5\mu, -5 + 3\mu)$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ .

(d) Si  $\lambda \neq -3$  SCD  $x = 3(1 - \lambda)/(\lambda + 3)$ ,  $y = (2\lambda - 3)/(\lambda + 3)$ ,  $z = 6/(\lambda + 3)$ ; si  $\lambda = -3$  SI.

(e) Si  $\lambda \neq 1$  SCD  $x = -1$ ,  $y = 0$ ,  $z = 1$ ; si  $\lambda = 1$  SCI  $(x, y, z) = (2 - 3\mu, 4 - 4\mu, \mu)$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ .

(f) Si  $\lambda \neq -1$  SI; si  $\lambda = -1$  SCD  $x = 4/3$ ,  $y = 4/3$ ,  $z = -1$ .

*Nota.*- SCD denota sistema compatible i determinat,  
SCI denota sistema compatible i indeterminat,  
SI denota sistema incompatible.

8.12 La posició relativa de dos plans de  $\mathbb{R}^3$  pot ser secants, paral·lels o coincidents. Determina la posició relativa de les següents parelles de plans de  $\mathbb{R}^3$ , segons els valors del paràmetre real  $k$ .

(a)  $x + y - 5z = -4$  i  $3x - y + 2z = k$ ,

(b)  $x + y - 5z = -4$  i  $-3x - 3y + 15z = k$ ,

(c)  $2x + ky + kz = 0$  i  $2x - y - z = 0$ .

**Sol.-** (a) secants per a tot  $k$ , (b) si  $k \neq 12$  els plans són paral·lels i si  $k = 12$  els plans són coincidents, (c) si  $k \neq -1$  són secants i si  $k = -1$  són coincidents.

8.13 Determina en quin conjunt de punts es tallen els següents conjunts de tres plans.

(a)  $x + 3y + 2z = 0$ ,  $2x - y + z = 0$ ,  $4x - 5y - 3z = 0$ ,

(b)  $x + y + z = 1$ ,  $x - y = 2$ ,  $x + 3y + 2z = 0$ ,

(c)  $x + y - 3z = 2$ ,  $2x + 2y - 6z = 4$ ,  $x + y + z = 1$ ,

(d)  $3x - y + z = 1$ ,  $x + 3y - z = 3$ ,  $x + y + z = -1$ .

**Sol.-** (a) es tallen en el punt  $(0, 0, 0)$ , (b) es tallen en la recta formada pels punts  $(x, y, z) = (3/2 - t, -1/2 - t, 2t)$  on  $t \in \mathbb{R}$ , (c) no es tallen en cap punt ja que dos dels plans són paral·lels, (d) es tallen en el punt  $(1, 0, -2)$ .

8.14 Determina el valor de  $k$  per a que els següents plans es tallin en una recta:

$$x + y + z = 2, \quad 2x + 3y + z = 3, \quad kx + 10y + 4z = 11.$$

**Sol.-**  $k = 7$ .

