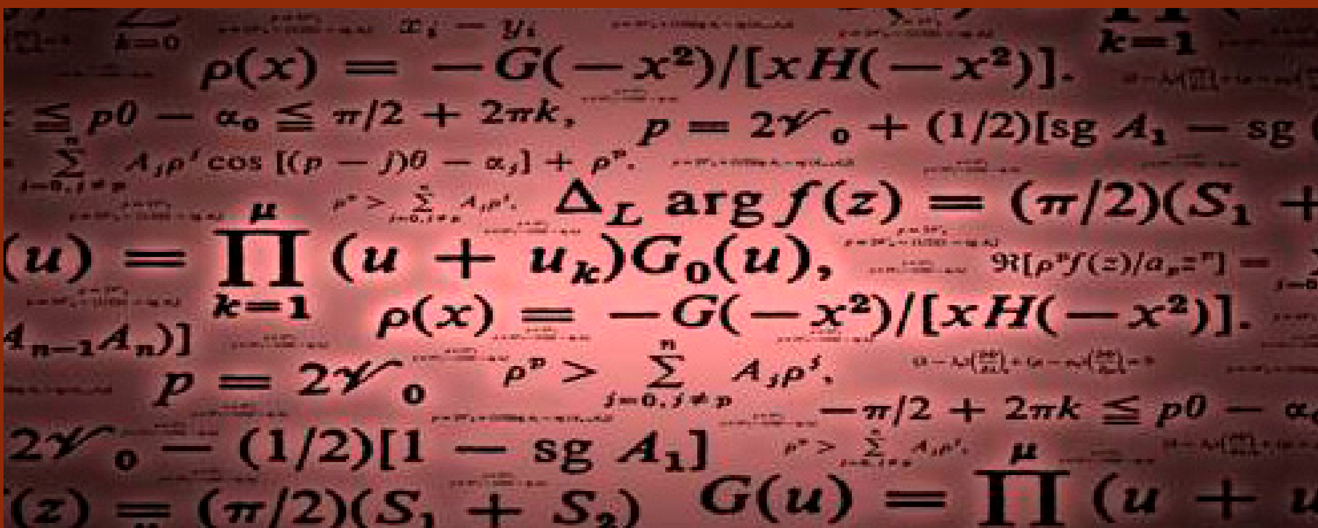
Curs Zero

CURS ZERO DE MATEMÀTIQUES PER A L'ENGINYERIA



Universitat de Lleida
Escola Politècnica Superior

Curs Zero de Matemàtiques per a l'Enginyeria.

Coordinadors: Jaume Giné Mesa

Magda Valls Marsal

Professors: Maite Grau Montaña

Hebert Pérez Roses

Jordi Pujolàs Boix

Departament de Matemàtica

Escola Politècnica Superior

Universitat de Lleida

ISBN 978-84-8409-763-1

DL L 857-2015

Índex

Descripció del curs

1 Fitxa del curs

TÍTOL:	Curs zero de matemàtiques per a l'enginyeria
DATES:	darrera quinzena de juliol
HORARI:	De 10:00h a 13:00h
LLOC:	Escola Politècnica Superior

2 Matrícula

CRÈDITS:	2,5 ECTS
LLOC:	Secretaria de Direcció EPS
	(Despatx 0.15 - Escola Politècnica Superior)
DATES:	a partir del 15 de juliol
HORARI:	De 9:00h a 13:00h

* El curs no s'oferirà si no hi ha un mínim de 15 alumnes matriculats.

3 Objectiu

Les assignatures de matemàtiques estan presents en totes les titulacions d'enginyeria i arquitectura tècnica. Són assignatures, que pel seu caràcter fonamental i transversal, són imprescindibles per cursar assignatures posteriors més especialitzades. En l'actualitat, l'accés dels estudiants de nou ingrés als estudis de grau és molt divers, i per aquest motiu els nivells de coneixements bàsics en matemàtiques són ben diferents. Així doncs, l'objectiu principal del curs és el de revisar i refrescar conceptes de matemàtiques ja presentats en el Batxillerat, per tal d'igualar els nivells de coneixement en aquest àmbit i, per tant, garantir un seguiment adequat de les assignatures de matemàtiques de primer curs de les titulacions de grau de l'Escola Politècnica Superior (EPS): Arquitectura Tècnica, Enginyeria Informàtica, Enginyeria Mecànica, Enginyeria Electrònica Industrial i Automàtica.

4 Estudiants a qui va adreçat

- Estudiants que provenen de Cicles Formatius de Grau Superior i accedeixen a qualsevol de les titulacions de grau de l'EPS.
- Estudiants que provenen de Batxillerat en Humanitats i Ciències Socials i accedeixen als estudis del Doble Grau en Enginyeria Informàtica i Administració i Direcció d'Empresa.
- Qualsevol estudiant de nou ingrés que accedeixi a qualsevol titulació de grau de l'EPS i vulgui reforçar els seus coneixements de matemàtiques.

Els estudiants de nou ingrés podran realitzar un test d'autodiagnosi, per avaluar el seu nivell i, per tant, la conveniència de matricular-se en aquest curs.

5 Estructura i metodologia

El curs s'imparteix durant 25 hores (2,5 crèdits ECTS) durant el mes de juliol. El curs s'organitza en sessions diàries de 3 hores. L'enfoc és eminentment pràctic. En cadascuna de les sessions de 3 hores s'abordarà un dels temes del programa, presentant primer, i breument, els coneixements teòrics bàsics, per abordar tot seguit el plantejament i resolució de problemes a l'aula (bé individualment o en grup). Es proposaran activitats de reforç pel període no lectiu d'agost.

6 Programa

- Expressions algebraiques, equacions i polinomis
  - Fraccions, potències, arrels i logaritmes
  - Binomi de Newton
  - Equacions de 2n grau i biquadrades
  - Equacions exponencials i logarítmiques
  - Inequacions
  - Operacions amb polinomis
  - Factorització d'un polinomi
- Trigonometria plana

  - Mesures d'angles: graus i radians
  - Raons trigonomètriques
  - Reducció a les raons trigonomètriques d'angles del primer quadrant
  - Identitats trigonomètriques
  - Raons trigonomètriques de la suma d'angles, angle doble, angle meitat i transformacions entre sumes i productes

- Funcions
  - Conceptes bàsics: domini, recorregut
  - Límits de funcions i càlcul d'asímptotes
  - Funcions polinòmiques
  - Funcions sinus, cosinus i tangent
  - Funcions exponencial i logarítmica
  - Valor absolut d'una funció

- Derivades
  - Definició
  - Càlcul de derivades, regles de derivació i regla de la cadena
  - Estudi i representació gràfica de funcions (extrems relatius, punts d'inflexió, concavitat, convexitat)
  - Problemes d'optimització

- Integrals
  - Càlcul de primitives immediates
  - Integració per parts
  - Integració per canvi de variable
  - Integració de fraccions racionals
  - Integral definida

- Geometria analítica plana
  - Equacions de la recta
  - Angle entre rectes

  - Rectes paral·leles i perpendiculars
  - Càlcul de l'equació de la recta tangent d'una corba
  - Distància entre punts i punt i recta
  - Còniques: equacions canòniques o reduïdes

- Àlgebra lineal
  - Matrius i determinants
  - Resolució de sistemes
  - Interpretació geomètrica del sistemes i de la seva solució

Autodiagnosis

Autodiagnosi inicial

1. Les solucions de l'equació $4^x - 2^x = 2$ són:

   (a) $x = 2$
   (b) $x = -1$ i $x = 2$
   (c) $x = 1$
   (d) $x = 1$ i $x = -2$
   (e) Cap dels anteriors

2. Siguin $p(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x - 1$ i $q(x) = x^2 - 4x + 3$ dos polinomis en x. El resultat de la divisió $p(x)/q(x)$ és:

   (a) Cocient: $x^2 - x - 4$. Resta: 0
   (b) Cocient: $x^2 - x - 4$. Resta: $-17x + 11$
   (c) Cocient: $-x^2 + x$. Resta: $2x^3 + 4x^2 - 7x - 1$
   (d) Cocient: $-x^2 + x + 4$. Resta: $-17x + 11$
   (e) Cap dels resultats anteriors

3. Sigui $f(x)$ una funció donada per la fórmula $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2x+3}$. El domini de f és:

   (a) $\mathbb{R}$
   (b) $\mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}\}$
   (c) L'interval $[-2; 2]$
   (d) $[-2; 2] - \{-\frac{3}{2}\}$
   (e) Cap dels anteriors

4. La funció derivada $f'(x)$ de $f(x) = \ln(\sqrt{e^{2x+5}})$ és:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{e^{2x+5}}}$.

(b) $\dfrac{1}{2e^{2x+5}}$.

(c) $\dfrac{1}{2}$.

(d) 1.

5. Una primitiva de $\dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$ és:

(a) $\ln(\sin^2(x))$.

(b) $\dfrac{-1}{\sin(x)}$.

(c) $\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2(x)} - 1}$.

(d) $\cos(x) - \dfrac{1}{\cos(x)}$.

6. L'àrea compresa entre $y = 1$, $x = 0$ i $y = \frac{1}{\sqrt{x+4}}$ val:

(a) 2.

(b) 1.

(c) Aquestes funcions no tanquen una àrea finita.

(d) 3.

7. L'angle entre les rectes del pla $x - 2y + 1 = 0$ i $2x + y - 3 = 0$ és:

(a) 45^o,

(b) 90^o,

(c) π radians,

(d) les dues rectes són paral·leles.

8. Per quin o quins valors del paràmetre real m els plans

$$\pi_1 : x+my+z = -1, \quad \pi_2 : mx+y+3z = -3, \quad \pi_3 : mx+y+z = -1,$$

tenen com a intersecció una recta?

(a) Per $m = 1$ i $m = -1$.

(b) Per $m = 1$.

(c) Per $m \neq 1$ i $m \neq -1$.

(d) Per cap valor de m.

9. La inversa de la matriu $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ és:

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

   (d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Respostes

1. (c)
2. (b)
3. (d)
4. (d)
5. (b)
6. (b)
7. (b)
8. (a)
9. (a)

Autodiagnosi final

1. Les solucions de l'equació $e^{4x-2} = 28$ són:
   (a) $x = \ln(28)$
   (b) $x = \frac{\ln 28}{4}$
   (c) $x = \ln(4)$
   (d) $x = \frac{2+\ln 28}{4}$
   (e) Cap dels anteriors

2. El màxim comú divisor dels polinomis $p(x) = x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48$ i $q(x) = x^5 - 16x$ és
   (a) $x(x-2)(x+2)(x^2+4)$
   (b) $x(x-2)(x+2)(x-3)(x+4)(x^2+4)$
   (c) $x^2 - 4$
   (d) $x^2 + 4$
   (e) Tots els anteriors
   (f) Cap dels anteriors

3. L'expresió trigonomètrica $\sin^4 x - \cos^4 x$ es pot simplificar com:
   (a) $-\cos 2x$
   (b) $\sin 2x$
   (c) $-\sin 2x$
   (d) $-\cos \frac{x}{2}$
   (e) Cap dels anteriors

4. El $\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x+\sqrt{x}}$ és:
   (a) 0
   (b) ∞
   (c) $\frac{\infty}{\infty}$
   (d) 1
   (e) 2
   (f) Cap dels anteriors

5. La funció $y = \frac{2x^2-10x}{x^2-6x+5}$ té:
   (a) Una asímptota horitzontal en $y = 0$
   (b) Una asímptota vertical en $x = 0$
   (c) Tots els anteriors
   (d) Cap dels anteriors

6. Les abscisses on $f(x) = (x^2 - 5x + 8)e^x$ i $g(x) = e^x$ tenen tangents paral·leles són:
   (a) $f(x)$ i $g(x)$ no són mai paral·leles.
   (b) Aquestes abscisses no són nombres reals.
   (c) $x = 1, 2$.
   (d) $x = -1, 3$.

7. D'entre tots els triangles de base 8cm i altura 3cm, el de perímetre mínim és el de perímetre:
   (a) 14.
   (b) 16.
   (c) 18.
   (d) $11 + 5\sqrt{3}$.

8. L'àrea que tanca $\arctan(x)$ entre $x = 0$ i $x = 1$ val:
   (a) $\frac{\pi}{4} - \ln(\sqrt{2})$.
   (b) $\frac{\ln(2)}{2} - \frac{3\pi}{4}$.
   (c) $\frac{3\pi}{4}$.
   (d) $\frac{\pi}{2}$.

9. La distància entre el punt $(4, -3)$ i la recta $\frac{x-4}{4} = \frac{y-3}{3}$ és:
   (a) 0 u,
   (b) 24 u,
   (c) 4.8 u,

(d) ∞ ja que la recta és infinita.

10. El determinant de la matriu $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ val:

(a) Aquesta matriu no té determinant,

(b) 0,

(c) -2,

(d) 2.

11. Considerem les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. El producte AB dóna:

(a) No es pot multiplicar A per B.

(b) $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & -9 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Respostes

1. (d)
2. (c)
3. (a)
4. (e)
5. (d)
6. (c)
7. (c)
8. (a)

9. (c)
10. (d)
11. (b)

Llistat d'exercicis de Matemàtiques.

Hebert Pérez Roses hebert.perez@matematica.udl.cat,
Jordi Pujolàs Boix jpujolas@matematica.udl.cat,
Maite Grau Montaña mtgrau@matematica.udl.cat.

Departament de Matemàtica
Escola Politècnica Superior
Universitat de Lleida

Capítol 1

Expressions algebraiques, equacions i polinomis

1.1 Eliminar l'arrel del denominador i simplificar.

(a) $\dfrac{10}{\sqrt{25}}$

(b) $\dfrac{12}{\sqrt{12}}$

(c) $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}-1}$

(d) $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$

(e) $\dfrac{2x}{\sqrt{12}} - \dfrac{y}{\sqrt{3}}$

Sol.- (a) 2, (b) $\sqrt{12}$, (c) $\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x+1}}{x-1}$, (d) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$, (e) $\frac{\sqrt{3}}{3}(x-y)$.

1.2 Calcular els logaritmes següents.

(a) $\log_2 8$

(b) $\log_2 32$

(c) $\log_{10} \dfrac{1}{100}$

(d) $\log_2 10 \cdot \log_{10} 64$

(e) $\log_{10} 1$

(f) $\ln 1$

(g) $\ln 0$

(h) $\ln 3 \cdot \log_3 e$

(i) $\log_2 \sqrt{8}$

Sol.- (a) 3, (b) 5, (c) -2, (d) 6, (e) 0, (f) 0, (g) no existeix, (h) 1, (i) 3/2.

1.3 Simplificar les expressions següents.

(a) $(x^2+5x+6)(x^2-1)$

(b) $\dfrac{(x^2+5x+6)(x^2-1)}{x^2+x-2}$

(c) $(x+3)(x^2-8x+15)$

(d) $\dfrac{(x+3)(x^2-8x+15)}{9-x^2}$

(e) $(x-1)^3$

(f) $\dfrac{x^4-4x^3+6x^2-4x+1}{(1-x)}$

(g) $\sqrt{x^5y^3}-\sqrt{x^3y^5}+3\sqrt{xy}$

(h) $(a+b/2)^4-(2a-b)^3$

Sol.- (a) $x^4+5x^3+5x^2-5x-6=(x+3)(x+2)(x-1)(x+1)$, (b) $(x+3)(x+1)$ per $x \neq -2$ i $x \neq 1$, (c) $x^3-5x^2-9x+45$, (d) $5-x$ per $x \neq -3$ i $x \neq 3$, (e) x^3-3x^2+3x-1, (f) $-x^3+3x^2-3x+1$ per $x \neq 1$, (g) $(x^2y-xy^2+3)\sqrt{xy}$, (h) $a^4+2a^3b-8a^3+(3a^2b^2)/2+12a^2b+(ab^3)/2-6ab^2+b^4/16+b^3$.

1.4 Resoldre les equacions quadràtiques següents.

(a) $x^2-11x+30=0$

(b) $x^2+5x/2-3/2=0$

(c) $x^2-5x/6+1/6=0$

(d) $x^2-2x/5+1/25=0$

(e) $9x^2+6x+1=0$

(f) $9x^2+4=0$

Sol.- (a) $x=5$ i $x=6$, (b) $x=1/2$ i $x=-3$, (c) $x=1/2$ i $x=1/3$, (d) $x=1/5$, (e) $x=-1/3$, (f) cap solució.

1.5 Resoldre les equacions biquadrades següents.

(a) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

(b) $x^4 - 32x^2 + 240 = 0$

(c) $36x^4 - 576 = 0$

(d) $2x^4 + 10 = 0$

Sol.- (a) $x = \pm 3$ i $x = \pm 4$, (b) $x = \pm 2\sqrt{3}$ i $x = \pm 2\sqrt{5}$, (c) $x = \pm 2$, (d) cap solució.

1.6 Resoldre les equacions següents, utilitzant les propietats de les potències i els logaritmes.

(a) $\dfrac{3^x}{9} = 243$

(b) $5\sqrt[5]{125^{2x}} = \left(\dfrac{1}{25}\right)^{3x-1}$

(c) $7^{x^2-5x+6} = 1$

(d) $4^{x+1} + 2^{x+3} - 320 = 0$

(e) $e^{2x-1} = \left(\sqrt[4]{2}\right)^3$

(f) $\log(5x+4) - \log 2 = \dfrac{1}{2}\log(x+4)$

Sol.- (a) $x = 7$, (b) $x = 5/36$, (c) $x = 2$ i $x = 3$, (d) $x = 3$, (e) $x = \frac{4+3\ln 2}{8}$, (f) $x = 0$ i $x = 36/25$.

1.7 Resoldre les inequacions següents.

(a) $2x - 5 \geq 0$

(b) $10 - x \leq 3 - 2x$

(c) $x^2 - 11x + 30 < 0$

(d) $x^2 - 11x + 30 > 0$

(e) $9x^2 + 6x + 1 < 0$

(f) $x^4 - 25x^2 + 144 \leq 0$

Sol.- (a) $x \geq 5/2$, (b) $x \leq -7$, (c) $5 < x < 6$, (d) $x \in (-\infty; 5) \cup (6; \infty)$, (e) cap solució, (f) $x \in [-4; -3] \cup [3; 4]$.

1.8 Dividir el polinomi $p(x)$ pel polinomi $m(x)$, i donar en cada cas el quocient $q(x)$ i la resta $r(x)$.

(a) $p(x) = 9x^3 - 9x^2 + 4x - 4$, $m(x) = x - 1$

(b) $p(x) = x^4 - 25x^2 + 144$, $m(x) = x^2 + x - 12$

(c) $p(x) = 16x^4 - 25x^2 + 144$, $m(x) = 2x - 12$

(d) $p(x) = 16x^4 - 25x^2 + 144$, $m(x) = x + 12$

(e) $p(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x - 3$, $m(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$

(f) $p(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 4x - 5$, $m(x) = x^2 + 1$

Sol.- (a) $q(x) = 9x^2+4$, $r(x) = 0$; (b) $q(x) = x^2 - x - 12$, $r(x) = 0$; (c) $q(x) = 8x^3+4x^2-21x/2-21/4$, $r(x) = 555/4$; (d) $q(x) = 16x^3-16x^2-9x+9$, $r(x) = 135$; (e) $q(x) = x^2+1$, $r(x) = 0$; (f) $q(x) = x^3-2x^2+x-3$, $r(x) = 3x - 2$.

1.9 Determinar a i b perquè $x = 3$ sigui una arrel doble de $p(x) = x^3 + ax^2 + 7x + b$.

Sol.- $a = -17/3, b = 3$.

1.10 En cada cas, descompondre el polinomi $p(x)$ en factors irreductibles.

(a) $p(x) = x^2 - 11x + 30$

(b) $p(x) = x^4 - 25x^2 + 144$

(c) $p(x) = 5x^4 + 5x^3 - 25x^2 + 5x - 30$

(d) $p(x) = 5x^5 - 10x^4 + 20x^3 - 40x^2 + 15x - 30$

Sol.- (a) $p(x) = (x-5)(x-6)$, (b) $p(x) = (x-3)(x-4)(x+3)(x+4)$, (c) $p(x) = 5(x^2+1)(x+3)(x-2)$, (d) $p(x) = 5(x^2+1)(x^2+3)(x-2)$.

1.11 Calcular el màxim comú divisor dels polinomis següents.

(a) $p(x) = x^4 - 16$, $q(x) = x^2 - 4$

(b) $p(x) = 15x^2 - 60$, $q(x) = 3x^2 - 12x + 12$

(c) $p(x) = x^4 - 2x^3 - 14x^2 - 2x - 15$, $q(x) = x^3 - 7x^2 - 4x + 28$

(d) $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$, $q(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$

Sol.- (a) $x^2 - 4$, (b) $3x - 6$, (c) 1, (d) $x^2 + 1$.

Capítol 2

Trigonometria plana

2.1 Convertir els angles següents, expressats en graus, a radians.

(a) 90°

(b) 270°

(c) 360°

(d) 45°

(e) 60°

(f) 120°

(g) 180°

(h) 20°

(i) 380°

Sol.- (a) $\pi/2$, (b) $3\pi/2$, (c) 2π, (d) $\pi/4$, (e) $\pi/3$, (f) $2\pi/3$, (g) π, (h) $\pi/9$, (i) $\pi/9$.

2.2 Convertir els angles següents, expressats en radians, a graus.

(a) $2\pi/9$

(b) $\pi/10$

(c) $3\pi/10$

(d) $5\pi/4$

(e) $9\pi/4$

Sol.- (a) 40°, (b) 18°, (c) 54°, (d) 225°, (e) 45°.

2.3 Calcular les raons trigonomètriques dels angles següents.

(a) $135\,^\circ$

(b) $120\,^\circ$

(c) $330\,^\circ$

(d) $240\,^\circ$

Sol.- (a) $\sin 135\,^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 135\,^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan 135\,^\circ = -1$, $\cot 135\,^\circ = -1$; (b) $\sin 120\,^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120\,^\circ = -\frac{1}{2}$, $\tan 120\,^\circ = -\sqrt{3}$, $\cot 120\,^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; (c) $\sin 330\,^\circ = -\frac{1}{2}$, $\cos 330\,^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 330\,^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cot 330\,^\circ = -\sqrt{3}$; (d) $\sin 240\,^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 240\,^\circ = -\frac{1}{2}$, $\tan 240\,^\circ = \sqrt{3}$, $\cot 240\,^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2.4 Determinar l'angle α en cada cas, en graus i en radians.

(a) $\sin\alpha = 1/3,\ \alpha < 90\,^\circ$

(b) $\cos\alpha = -3/5,\ \pi/2 < \alpha < \pi$

(c) $\tan\alpha = 2,\ 180\,^\circ < \alpha < 270\,^\circ$

(d) $\cot\alpha = -1,\ 270\,^\circ < \alpha < 360\,^\circ$

Sol.- (a) $\alpha = 19{,}47\,^\circ$, (b) $\alpha = 126{,}9\,^\circ$, (c) $\alpha = 243{,}43\,^\circ$, (d) $\alpha = 315\,^\circ$.

2.5 Calcular l'altura de l'edifici representat en la Figura 2.1.

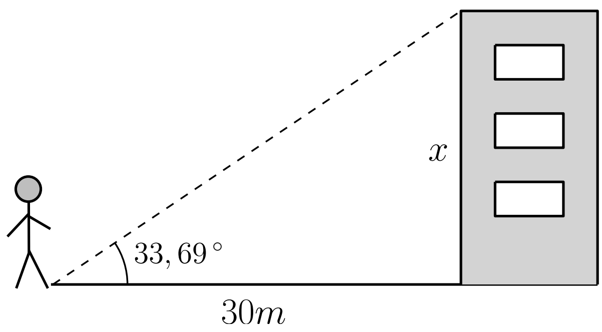


Figura 2.1: Calcular l'altura de l'edifici.

Sol.- $20m$.

2.6 Simplificar les expressions següents.

(a) $\dfrac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$

(b) $\sqrt{1-\sin\alpha}\sqrt{1+\sin\alpha}$

(c) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$

(d) $\cos^3\alpha + \cos^2\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\sin^2\alpha + \sin^3\alpha$

(e) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}$

Sol.- (a) $\cos\alpha$, (b) $\pm\cos\alpha$, (c) $-\cos 2\alpha$, (d) $\sin\alpha+\cos\alpha$, (e) $1+\sin\alpha$.

2.7 Determinar si les identitats següents són verdaderes o falses.

(a) $\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta} = \tan\alpha\tan\beta$

(b) $\sin^2\alpha - \cos^2\beta = \sin^2\beta - \cos^2\alpha$

(c) $\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} = \dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$

(d) $\tan\alpha + \cot\alpha = 2\cos 2\alpha$

Sol.- (a) verdadera, (b) verdadera, (c) verdadera, (c) falsa.

2.8 Resoldre les següents equacions trigonomètriques.

(a) $\cos 2x = 2\sin 2x$

(b) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$

(c) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$

(d) $2\cos^2 x + 3\cos x = 2$

Sol.- (a) $x = 0,074\pi + 2k\pi$ i $x = 1,074\pi + 2k\pi$, (b) $x = 2\pi/3 + 2k\pi$ i $x = 4\pi/3 + 2k\pi$, (c) $x = \pi/3 + 2k\pi$ i $x = 4\pi/3 + 2k\pi$, (c) $x = \pi/3 + 2k\pi$ i $x = 5\pi/3 + 2k\pi$.

Capítol 3

Funcions

3.1 Analitzar el gràfic de la Figura 3.1 i determinar si representa una funció. En cas afirmatiu, donar el seu domini i el seu recorregut.

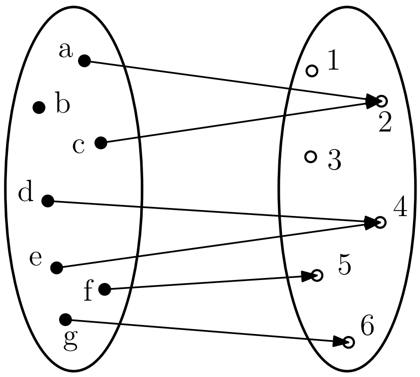


Figura 3.1: Relació entre dos conjunts

Sol.- És funció. Domini: $\{a, c, d, e, f, g\}$, Recorregut: $\{2, 4, 5, 6\}$.

3.2 Analitzar el gràfic de la Figura 3.2 i determinar si representa una funció. En cas afirmatiu, donar el seu domini i el seu recorregut.

Sol.- No és funció.

3.3 Determinar el domini i el recorregut de les funcions següents, definides en $\mathbb{R}$.

(a) $f(x) = 5x^2$

(b) $f(x) = 5x^2 + 3$

(c) $f(x) = -5x^2 + 3$

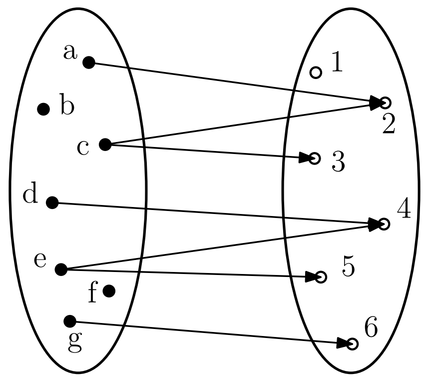


Figura 3.2: Relació entre dos conjunts

(d) $f(x) = x^2 + 5x + 12$

(e) $f(x) = 2\sin x$

(f) $f(x) = \sin x - 1$

(g) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

(h) $f(x) = \sqrt{x-2}$

(i) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

(j) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

Sol.- (a) Domini: $\mathbb{R}$, Recorregut: $[0;+\infty)$; (b) Domini: $\mathbb{R}$, Recorregut: $[3;+\infty)$; (c) Domini: $\mathbb{R}$, Recorregut: $(-\infty;3]$; (d) Domini: $\mathbb{R}$, Recorregut: $[23/4;+\infty)$; (e) Domini: $\mathbb{R}$, Recorregut: $[-2;2]$, (f) Domini: $\mathbb{R}$, Recorregut: $[-2;0]$; (g) Domini: $\mathbb{R}-\{0\}$, Recorregut: $[-0,217234;1)$; (h) Domini: $[2;+\infty)$, Recorregut: $[0;+\infty)$; (i) Domini: $\mathbb{R}-\{1\}$, Recorregut: $\mathbb{R}-\{0\}$; (j) Domini: $\mathbb{R}$, Recorregut: $(0;1]$.

3.4 Un noi llança una pilota a l'aire, que aconsegueix una altura màxima de 5 metres, i cau a 10 metres de distància del noi. Sabem que la trajectòria de la pilota és una funció quadràtica $f(x) = ax^2 + bx + c$. Suposant que el noi és a l'origen del sistema de coordenades, i que la pilota es llança en direcció de l'eix x, determinar els valors de a, b, i c. **Sol.-** $f(x) = -x^2/5 + 2x$.

3.5 Calcular els límits següents.

(a) $\lim_{x\to 0}\left(x^2+1\right)$

(b) $\lim_{x\to\infty}\left(-x^4+x^2-x+1\right)$

(c) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

(d) $\lim_{x\to 5}\dfrac{x^2-11x+30}{x-5}$

(e) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right)$

(f) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5}-x+5\right)$

(g) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2}-x^2\right)$

(h) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-\dfrac{3x^2}{x-3}\right)$

(i) $\lim_{x\to 0}(\cos x-1)$

(j) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\cos x}$

(k) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x}$

Sol.- (a) 1, (b) $-\infty$, (c) 2, (d) -1, (e) -1, (f) 5, (g) 1/2, (h) $-\infty$, (i) 0, (j) 0, (g) no existeix.

3.6 Calcular el valor de m per a satisfer les següents condicions.

(a) $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{(1-mx)(2x+3)}{x^2-4}=6$

(b) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2+mx-6}{3x-9}$ sigui finit

Sol.- (a) $m=-3$, (b) $m=-1$.

3.7 Estudiar les asímptotes de les funcions següents i dibuixar-les.

(a) $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$

(b) $f(x)=\dfrac{2x^2+3}{x^2+1}$

(c) $f(x)=\dfrac{4x-2}{x^2-2x}$

(d) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 - 4}$

(e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

(f) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x}{x - 2}$

(g) $f(x) = \log(x - 5)$

(h) $f(x) = e^x - 1$

(i) $f(x) = e^x + x$

3.8 Dibuixar les següents funcions.

(a) $f(x) = (x - 1)^2$

(b) $f(x) = (x - 1)^2 + 5$

(c) $f(x) = (x + 1)^3$

(d) $f(x) = 2\cos(x - \dfrac{\pi}{2})$

(e) $f(x) = e^x \cos x$

Capítol 4

Derivació

4.1 A partir de la definició, determineu la derivada de les funcions següents:

(a) $3x^2 + 2x - 8$

(b) $\sqrt{5 - 3x}$

(c) $\dfrac{2t+1}{t-3}$

(d) $\dfrac{2+x}{x^2}$

Sol.- (a) $6x + 2$, (b) $\dfrac{-3}{2\sqrt{5-3x}}$, (c) $\dfrac{-7}{(t-3)^2}$, (d) $\dfrac{-(x+4)}{x^3}$.

4.2 Deriveu les següents funcions algebraiques:

(a) $x^2\sqrt{x}$

(b) $3x^2 + 4x$

(c) $4x\sqrt{x+1}$

(d) $\dfrac{4x}{\sqrt{x+1}}$

Sol.- (a) $\dfrac{5}{2}x\sqrt{x}$, (b) $6x + 4$, (c) $\dfrac{6x+4}{\sqrt{x+1}}$, (d) $\dfrac{2x+4}{(x+1)^{3/2}}$.

4.3 Deriveu les següents composicions de funcions:

(a) $(x^2 - 2x)^4$

(b) $4x\sqrt{x^2+1}$

(c) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{5-x}}$

(d) $(7-\sqrt{x-2})^2$

Sol.- (a) $8(x-1)(x^2-2x)^3$, (b) $\dfrac{8x^2+4}{\sqrt{x^2+1}}$, (c) $\dfrac{5}{2(5-x)\sqrt{5x-x^2}}$, (d) $1-\dfrac{7}{\sqrt{x-2}}$.

4.4 Deriveu les següents funcions:

(a) $\cos(\frac{\pi}{2}x^3)$
(b) $\tan^3(\frac{x}{2})$
(c) $4\sin(\dfrac{x-1}{x+1})$
(d) $(7-\sqrt{x-2})^2$
(e) $\ln(\sqrt{x+5})^3$
(f) $x\ln(x+7)-x$
(g) e^{2-x^2}
(h) $\dfrac{x}{e^{8x^2-8}}$
(i) $e^{-3x}\cos(3x)$
(j) $\sqrt{4+\ln^2(-3x)}$

Sol.-(a) $-3\frac{\pi}{2}x^2\sin(\frac{\pi}{2}x^3)$, (b) $\dfrac{3}{2}\tan^2(\dfrac{x}{2})\sec^2(\dfrac{x}{2})$, (c) $\dfrac{8}{(x+1)^2}\cos(\dfrac{x-1}{x+1})$, (d) $1-\dfrac{7}{\sqrt{x-2}}$, (e) $\dfrac{3}{2(x+5)}$, (f) $\ln(x+7)-\dfrac{7}{x+7}$, (g) $-2xe^{2-x^2}$, (h) $(1-16x^2)e^{8-8x^2}$, (i) $-3e^{-3x}(\sin(3x)+\cos(3x))$, (j) $\dfrac{\ln(-3x)}{x\sqrt{4+\ln^2(-3x)}}$.

4.5 Trobeu la derivada n-èssima de $f(x)=\ln(2x+1)$.

Sol.- $f^n(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{2^n(n-1)!}{(2x+1)^n}$.

4.6 Doneu l'equació de la recta tangent a $f(x)$ en el punt $x=x_0$ si

(a) $f(x)=\cos(\frac{\pi}{2}x^3), x_0=1$,
(b) $f(x)=x\ln(x+7)-x, x_0=0$,
(c) $f(x)=x^3-2x-1, x_0=2$.

Sol.- (a) $y = \frac{-3\pi}{2}x + \frac{3\pi}{2}$, (b) $y = (\ln(7) - 1)x$, (c) $y = 10x - 17$.

4.7 Representeu gràficament les funcions $\dfrac{x^2}{2x-1}$ i $\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

Sol.-

4.8 Trobeu els valors de x on $f(x)$ i $g(x)$ tenen tangents paral·leles, per a

(a) $f(x) = x^3 - 2x - 1$, $g(x) = x^2 + 3x + 4$,

(b) $f(x) = \dfrac{4^{x+1}}{\ln(4)} + \dfrac{2^{x+3}}{\ln(2)}$, $g(x) = 320x$,

(c) $f(x) = \dfrac{e^{2x-1}}{2}$, $g(x) = 2^{\frac{3}{4}}x$.

Sol.- (a) $x = \frac{5}{3}, -1$, (b) $x = 3$, (c) $x = \frac{4+3\ln(2)}{8}$.

4.9 Una partícula es mou seguint una trajectòria $x(t)$, on t representa el temps. Determineu els tres intervals on la posició, la velocitat i l'acceleració són ≥ 0 respectivament, si

(a) $x(t) = \ln(t^2 + 3)$,

(b) $x(t) = t^2 e^{-3t}$.

Sol.- (a) la posició sempre és positiva, $t \geq 0$, $t \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, (b) la posició sempre és positiva, $t \in [0, \frac{2}{3}]$, $t \notin [\frac{2-\sqrt{2}}{3}, \frac{2+\sqrt{2}}{3}]$.

4.10 Un far està a 2 km de la costa en línia recta. El seu mecanisme gira a una velocitat constant de $\frac{\pi}{10}$ radians, però naturalment la llum que impacta a l'ull d'un observador es mou més depressa quan més lluny del far es troba. Et trobes a 3 km en línia recta del punt de la costa més proper al far. A quina velocitat es mou el raig de llum quan t'il·lumina?

Sol.- $\frac{13\pi}{20} \cong 2,04$ km/s.

4.11 Volem fabricar una piscina de base quadrada i una àrea superficial de 48 metres quadrats. Trobeu les mides que maximitzen la quantitat d'aigua que contindrà.

Sol.- La piscina ha de tenir una profunditat de 2 metres i una llargada de 4.

4.12 Trobeu el radi que ha de tenir un recipient cilíndric tapat de volum V fixat per tal de minimitzar la seva superfície.

Sol.- $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Capítol 5

Integració

5.1 Trobeu una primitiva (o antiderivada) de les funcions següents:

(a) $3x^2 + 2x - 8$

(b) $\sqrt{5-3x}$

(c) $\dfrac{3}{t^3} - \dfrac{5}{t^6}$

(d) $5x - \sqrt{3x}$

Sol.- (a) $x^3 + x^2 - 8x + C$, (b) $-\dfrac{2}{9}(5-3x)^{3/2}$, (c) $\dfrac{1}{t^5} - \dfrac{3}{2t^2}$,
(d) $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x^{3/2} + \dfrac{5x^2}{2}$.

5.2 Calculeu les següents integrals indefinides:

(a) $\displaystyle\int \frac{5}{\sqrt{x-3}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int -6x^2(3-2x^3)^4\,dx$

(c) $\displaystyle\int (3-2x)^3\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{12x^2+3}{4x^3+3x}\,dx$

(e) $\displaystyle\int 2x\,e^{x^2}\,dx$

(f) $\displaystyle\int -\frac{7}{x^2}\cos(\frac{7}{x})\,dx$

Sol.- (a) $10\sqrt{(x-3)}+C$, (b) $\dfrac{(3-2x^3)^5}{5}+C$, (c) $-\dfrac{(3-2x)^4}{8}+C$,
(d) $\ln(4x^3+3x)+C$, (e) $e^{x^2}+C$, (f) $\sin(\frac{7}{x})+C$.

5.3 Integreu les següents funcions exponencials:

(a) $\displaystyle\int e^{2x-5}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

(c) $\displaystyle\int e^{x}\sqrt{1-e^{x}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int e^{\cos(7x)}\sin(7x)\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{e^{5x}}{e^{5x}+4}\,dx$

Sol.- (a) $\frac{1}{2}e^{2x-5}+C$, (b) $2e^{\sqrt{x}}+C$, (c) $-\dfrac{2}{3}(1-e^{x})^{3/2}+C$,
(d) $\ln(e^{x}-e^{-x})+C$, (e) $-\dfrac{1}{7}e^{\cos(7x)}+C$, (f) $\dfrac{1}{5}\ln(e^{5x}+4)+C$.

5.4 Integreu per parts:

(a) $\displaystyle\int xe^{x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \ln^2(x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int \theta\cos(\theta)\,d\theta$

(d) $\displaystyle\int x^2\sin(x)\,dx$

(e) $\displaystyle\int e^{x}\cos(x)\,dx$

Sol.- (a) $(x-1)e^{x}+C$, (b) $x\ln^2(x)-2x\ln(x)+2x+C$,
(c) $\theta\sin(\theta)+\cos(\theta)+C$, (d) $-x^2\cos(x)+2x\sin(x)+2\cos(x)+C$,
(e) $\dfrac{1}{2}e^{x}(\cos(x)+\sin(x))+C$.

5.5 Integreu per canvi de variable:

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+4}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int 3x\sqrt{2x+7}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-2)^5}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{(x-6)^3}\,dx$

Sol.- (a) $\frac{2}{3}(x-8)\sqrt{x+4}+C$, (b) $\frac{1}{5}(2x+7)^{3/2}+(3x-7)+C$, (c) $\frac{-3x^2+4x-2}{6(x-2)^4}+C$, (d) $\frac{15-4x}{2(x-6)^2}$.

5.6 Integreu buscant les derivades de $\ln(x)$ i $\arctan(x)$:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3+x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{5x+4}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{3}{x^2+5}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+3}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+10}\,dx$

Sol.- (a) $\frac{1}{3}\ln(|x^3+3x|)+C$, (b) $\frac{1}{5}\ln(|5x+4|)+C$, (c) $x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$, (d) $\frac{3}{4}\arctan(\frac{x}{4})+C$, (e) $\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}x)+C$, (f) $\frac{1}{3}\arctan(\frac{x+1}{3})+C$.

5.7 Calculeu les següents integrals definides:

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$

(b) $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{1}{x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_2^3 \frac{5z}{1+z^2}\,dz$

(d) $\displaystyle\int_0^5 |2x-5|\,dx$

(e) $\displaystyle\int_1^4 3-|x-3|\,dx$

Sol.- (a) 2, (b) 2, (c) $\dfrac{5}{2}\ln(2)$, (d) $\dfrac{25}{2}$, (e) $\dfrac{13}{2}$.

5.8 Calculeu l'àrea que tanquen les corbes:

(a) $y = x^2+2$ i $y = -x$ entre $x = 0$ i $x = 1$.

(b) $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$.

(c) $y = \cos(x)$ i $y = \sin(x)$ entre dos punts de tall consecutius.

(d) $y = 3x^3 - x^2 - 10x$ i $y = -x^2 + 2x$.

Sol.- (a) $\dfrac{17}{6}$, (b) $\dfrac{1}{3}$, (c) $2\sqrt{2}$, (d) 24.

Capítol 6

Geometria analítica plana

6.1 En quin punt del pla es tallen les següents parelles de rectes? Dibuixa les dues rectes en uns eixos coordenats i marca el punt de tall.

(a) $3x + 5y - 16 = 0$ i $x - 2y + 2 = 0$.

(b) $\dfrac{x + 3y}{2} = 5$ i $4 - \dfrac{2x - y}{2} = 1$.

(c) $3x + 2y = 7$ i $x + y = 3$.

(d) $x + y = 4$ i $3x + 2y = 11$.

(e) $x + y = 4$ i $3x + 3y = 12$.

(f) $x + y = 4$ i $2x + 2y = 3$.

(g) $\dfrac{2x - 3y}{2} = 10x + \dfrac{9}{4}$ i $\dfrac{x}{5} - \dfrac{3y}{2} = 5x + y/10$.

(h) $\left\{ \begin{array}{l} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 - 5\lambda \end{array} \right.$ i $\left\{ \begin{array}{l} x = 4 - t \\ y = 3 + 4t \end{array} \right.$, on λ i t són paràmetres reals.

Sol.- (a) $(2, 2)$, (b) $(4, 2)$, (c) $(1, 2)$, (d) $(3, 1)$, (e) Són rectes coincidents: tots els punts de $x + y = 4$ pertanyen a les dues rectes. (f) Són rectes paral·leles: no es tallen en cap punt. (g) $(-1/2, 3/2)$, (h) $(7, -9)$.

6.2 (a) Dóna l'expressió de totes les rectes del pla que passen pel punt $(3, -2)$.

(b) Dóna l'expressió de totes les rectes del pla que tenen pendent -2.

(c) Dóna l'expressió de totes les rectes del pla que són verticals.

(d) Dóna l'expressió de totes les rectes del pla perpendiculars a la recta $3x - y + 4 = 0$

Sol.- (a) $y = -2 + m(x - 3)$ on $m \in \mathbb{R}$, (b) $y = -2x + h$ on $h \in \mathbb{R}$, (c) $x = k$ on $k \in \mathbb{R}$, (d) $x + 3y + h = 0$ on $h \in \mathbb{R}$.

6.3 Considerem els punts A i B del pla de coordenades $A(3,2)$ i $B(5,4)$.

(a) Calcula les coordenades del punt mig del segment AB.

(b) Calcula les coordenades dels punts que divideixen el segment AB en tres parts iguals.

(c) Calcula les coordenades del punt C tal que $2\,\overrightarrow{CA} = 3\,\overrightarrow{CB}$.

(d) Considerem el punt $D(-2,3)$. Calcula les coordenades del baricentre del triangle format pels punts A, B i D.

(e) Calcula les coordenades d'un punt E tal que els punts A, B, D i E formi un paral·lelogram.

(f) Quina és la distància entre els punts A i B?

(g) Calcula les coordenades d'un punt F tal que els punts A, B i F formin un triangle equilàter.

Sol. (a) $(4,3)$, (b) $(11/3, 8/3)$ i $(13/3, 10/3)$, (c) $(9,8)$, (d) $(2,3)$, (e) pot ser $(10,3)$, $(-4,1)$ o bé $(0,5)$, (f) $2\sqrt{2}$ u, (g) pot ser $(4-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$ o bé $(4+\sqrt{3}, 3-\sqrt{3})$.

6.4 Donats els vectors $\vec{u} = (2,a)$ i $\vec{v} = (3,-2)$, determineu el valor de a per tal que

(a) siguin perpendiculars.

(b) siguin paral·lels.

(c) formin un angle de $\pi/3$ radians.

Sol.- (a) $a = 3$, (b) $a = -4/3$, (c) $a = 16 \pm 26/\sqrt{3}$.

6.5 Considerem el triangle de vèrtexs en els punts $P_0(3,5)$, $P_1(1,3)$ i $P_2(a,10)$. Determineu el valor de a de manera que

(a) el triangle sigui rectangle en P_0.

(b) el triangle sigui rectangle en P_1.

(c) el triangle sigui rectangle en P_2.

(d) el triangle sigui equilàter.

Sol.- (a) $a = -2$, (b) $a = -6$, (c) no es pot donar, (d) no es pot donar.

6.6 Donats els vectors $\vec{u} = (5,1)$ i $\vec{v} = (a,2)$, determineu el valor de a per tal que els vectors $\vec{v}$ i $\vec{u} + \vec{v}$ siguin perpendiculars.

Sol.- $a = -3$ o bé $a = -2$.

6.7 Un cotxe surt de A a 60 km/h. Dues hores després surt del mateix punt un altre cotxe a 90 km/h. A quina distància de A troba el segon cotxe al primer i quant de temps tarda a aconseguir-ho?
Sol.- Es troben al cap de 4 hores d'haver sortit el segon cotxe i estan a una distància de 360 km del punt A.

6.8 Determina les coordenades del punt simètric al $(-2, 3)$ respecte la recta $x + 2y + 1 = 0$.
Sol. $(-4, -1)$.

6.9 Calcula les coordenades de tots els punts de la recta $x - y = 3$ que estan a distància 2u del punt $P(3, 2)$.
Sol. $(3, 0)$ i $(5, 2)$.

6.10 Determina la posició relativa entre de les dues rectes $x + 3y - 1 = 0$ i $kx + (k - 2)y + (k + 1) = 0$, en funció del paràmetre real k.

Sol.- Si $k \neq -1$, aleshores les dues rectes són secants. Si $k = -1$, les dues rectes són paral·leles.

6.11 Determina la posició relativa i calcula la distància entre les següents parelles de rectes del pla:

(a) $x + 3y - 1 = 0$ i $-x - 3y - 2 = 0$,
(b) $2x - y + 4 = 0$ i $x - 2 = \dfrac{y}{2}$,
(c) $2x - y + 4 = 0$ i $-x + 2y + 1 = 0$,
(d) $3y = 2x + 1$, $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-2}{2}$.

Sol.- (a) Les dues rectes són paral·leles i estan a distància $3/\sqrt{10}$ u. (b) Les dues rectes són coincidents i estan a distància 0 u, (c) Les dues rectes són secants, es tallen en el punt $(-3, -2)$ i estan a distància 0 u. (d) Les dues rectes són paral·leles i estan a distància $1/\sqrt{13}$ u.

6.12 Determina l'angle entre les següents parelles de rectes del pla:

(a) $x - y = 2$ i $x = 1$,
(b) $x - y = 2$ i $x + y = 2$,
(c) $x - y = 2$ i $x - y = -2$,
(d) $x - y = 2$ i $x + 2y + \sqrt{3}\,y - 4 - \sqrt{3} = 0$.

Sol.- (a) 45^o, (b) 90^o, (c) són rectes paral·leles, (d) 60^o.

Capítol 7

Còniques

7.1 Digues quin tipus de cònica (el·lipse, paràbola o hipèrbola) es representa per cadascuna de les equacions següents i representa-la gràficament.

(a) $4x^2 + y^2 = 1$,

(b) $4x^2 - y^2 = 1$,

(c) $4x^2 - y = 1$,

(d) $4(x-3)^2 + (y+1)^2 = 2$.

Sol.- (a) el·lipse, (b) hipèrbola, (c) paràbola, (d) el·lipse.

7.2 Representa gràficament les següents paràboles:

(a) $y = x^2 - 3x + 2$,

(b) $y = x^2 - 3x + 9/4$,

(c) $y = x^2 - 3x + 3$,

(d) $y = -x^2 + 3x - 2$,

(e) $x = y^2 - 3y + 2$.

7.3 Dóna l'equació de cadascuna de les circumferències següents:

(a) de centre el punt $(3, -2)$ i radi 4,

(b) tal que un dels seus diàmetres té com extrems els punts $(3, 5)$ i $(-1, 2)$,

(c) tal que el seu centre es troba en la recta $y = x$, el seu radi és $\sqrt{5}$ i passa pel punt $(0, -3)$,

(d) de centre el punt $(3, 5)$ i que passa pel punt $(-1, 2)$.

Sol.- (a) $(x-3)^2+(y+2)^2=16$, (b) $(x-1)^2+(y-7/2)^2=25/4$, (c) pot ser $(x+1)^2+(y+1)^2=5$ o bé $(x+2)^2+(y+2)^2=5$, (d) $(x-3)^2+(y-5)^2=25$.

7.4 Dóna l'equació de cadascuna de les còniques següents:

(a) la circumferència inscrita al quadrat de vèrtexs $(2,-1)$, $(6,-1)$, $(6,3)$ i $(2,3)$,

(b) la circumferència circumscrita al quadrat de vèrtexs $(2,-1)$, $(6,-1)$, $(6,3)$ i $(2,3)$,

(c) l'el·lipse inscrita al rectangle de vèrtexs $(1,2)$, $(-1,2)$, $(-1,-2)$, $(1,-2)$,

Sol.- (a) $(x-4)^2+(y-1)^2=4$, (b) $(x-4)^2+(y-1)^2=8$, (c) $x^2+y^2/4=1$.

7.5 En quin punt del pla es tallen les següents parelles de corbes? Dibuixa les dues corbes en uns eixos coordenats i marca els punts de tall, si n'hi ha.

(a) la circumferència $x^2+y^2-2x-3=0$ i la recta $3x+y-5=0$,

(b) les el·lipses $\dfrac{5x^2}{4}+y^2=1$ i $x^2+\dfrac{5y^2}{4}=1$,

(c) la hipèrbola $x^2-y^2=2$ i la paràbola $x=y^2$,

(d) la hipèrbola $xy=1$ i la recta $2x-y+1=0$.

Sol.- (a) $(11/5,-8/5)$ i $(1,2)$, (b) $(2/3,2/3)$, $(-2/3,2/3)$, $(2/3,-2/3)$ i $(-2/3,-2/3)$, (c) $(2,\sqrt{2})$ i $(2,-\sqrt{2})$, (d) $(-1,-1)$ i $(1/2,2)$.

7.6 Determina les equacions de les rectes tangents a la circumferència $x^2+y^2=4$ que passen pel punt $P(5/2,0)$. En quins punts es troben cadascuna de les rectes amb la circumferència?
Sol.- $y=\dfrac{4}{3}\left(x-\dfrac{5}{2}\right)$ que es troba amb la circumferència en el punt $\left(\dfrac{8}{5},-\dfrac{6}{5}\right)$ i $y=-\dfrac{4}{3}\left(x-\dfrac{5}{2}\right)$ que es troba amb la circumferència en el punt $\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{6}{5}\right)$.

7.7 Determina l'equació de la recta tangent a la circumferència $x^2+y^2=4$ que passa pel punt $P(1,\sqrt{3})$.
Sol.- $x+\sqrt{3}y=4$.

7.8 Determina les equacions de les rectes tangents a la paràbola $y = x^2 + 2$ que passen pel punt $P(0, 1)$. En quins punts es troben cadascuna de les rectes amb la paràbola?
Sol.- $y = 1 + 2x$ que es troba amb la paràbola en el punt $(1, 3)$ i $y = 1 - 2x$ que es troba amb la paràbola en el punt $(-1, 3)$.

7.9 Determina les equacions de les rectes tangents a la paràbola $y^2 = 4x$ que passen pel punt $P(-4, 0)$. En quins punts es troben cadascuna de les rectes amb la paràbola?
Sol.- $y = x/2 + 2$ que es troba amb la paràbola en el punt $(4, 4)$ i $y = -x/2 - 2$ que es troba amb la paràbola en el punt $(4, -4)$.

7.10 Determina l'equació de la recta tangent a l'el·lipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ que passa pel punt $P\left(\sqrt{2}, \dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)$.
Sol.- $y = \dfrac{5}{\sqrt{2}} - \dfrac{5}{2}\left(x - \sqrt{2}\right)$.

7.11 Determina les equacions de les rectes tangents a la hipèrbola $x^2 - y^2 = 1$ que passen pel punt $P(3/5, 0)$. En quins punts es troben cadascuna de les rectes amb la hipèrbola?
Sol.- $y = \dfrac{5}{4}\left(x - \dfrac{3}{5}\right)$ que es troba amb la hipèrbola en el punt $\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$ i $y = -\dfrac{5}{4}\left(x - \dfrac{3}{5}\right)$ que es troba amb la hipèrbola en el punt $\left(\dfrac{5}{3}, -\dfrac{4}{3}\right)$.

7.12 Recordem que l'el·lipse és la corba formada per tots els punts del pla tals que la suma de les seves distàncies a dos punts interiors és constant. Si considerem la corba formada per tots els punts del pla tals que el producte de les seves distàncies a dos punts interiors és constant també podem obtenir un òval, que no és una cònica. Comprova que l'equació de la corba formada per tots els punts del pla tals que el producte de les seves distàncies als punts $(1, 0)$ i $(-1, 0)$ és constant igual a 2 és

$$\left((x-1)^2 + y^2\right)\left((x+1)^2 + y^2\right) = 4,$$

i representa aquesta corba gràficament.

Capítol 8

Àlgebra lineal

8.1 Considerem les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcula, si és possible: $3\,A$, $A+B$, $A-2B$, AB, BA, A^2, B^2, A^{-1}, B^{-1}, A^T, B^T i B^TA.

Sol.- $3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & 6 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 & 1 \\ 6 & 8 & 4 & 4 \\ 7 & 7 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 6 & 5 & 8 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$,

$A^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 6 & -4 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$B^TA = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -5 \\ 7 & 4 & 10 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

8.2 Calcula els següents determinants:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \ \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \ \text{(c)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \ \text{(d)} \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Solució.- (a) -1, (b) 0, (c) -4, (d) 12.

8.3 Comprova que $A^T = BAB^{-1}$, on

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & \sqrt{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 7 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

8.4 Resol cadascuna de les següents equacions matricials:

$$\text{(a) } AX = B, \quad \text{(b) } XA = B^T, \quad \text{(c) } A^{-1}X = B,$$

on

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sol.- (a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \\ 7/2 & -1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 9 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

8.5 Considerem la matriu $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Calcula M^{-1}, $I_2 + M + M^2 + M^3 + M^4 + \ldots + M^{2014}$ i M^{4655}.
Sol.- $M^{-1} = -M$, $I_2 + M + M^2 + \ldots + M^{2014} = M$ i $M^{4655} = -M$.

8.6 Determina el rang de les següents matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}.$$

Solució.- El rang de A és 2 i el rang de B és 2.

8.7 Determina el rang de les matrius següents segons els paràmetres:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 3 \\ 4 & 0 & -t \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2s & -1 \\ s & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} w & -1 & 1 \\ 4 & -w & 2 \\ 3w & -3 & w+1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 3/2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & -a \\ a & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & a \\ 2 & a & 3 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ m & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sol.- Si $t \neq 0$ i $t \neq 4$, $\operatorname{rg} A = 3$; si $t = 0$ o bé si $t = 4$, $\operatorname{rg} A = 2$.
Si $s \neq -1$ i $s \neq 3/2$, $\operatorname{rg} B = 3$; si $s = -1$ o bé si $s = 3/2$, $\operatorname{rg} B = 2$.
Si $w \neq 2$ i $w \neq -2$, $\operatorname{rg} C = 3$; si $w = 2$, $\operatorname{rg} C = 1$; si $w = -2$, $\operatorname{rg} C = 2$.
Si $a \neq 1$ i $a \neq -2$, $\operatorname{rg} D = 3$; si $a = 1$, $\operatorname{rg} D = 1$; si $a = -2$, $\operatorname{rg} D = 2$.
Si $a \neq 0$, $\operatorname{rg} E = 3$; si $a = 0$, $\operatorname{rg} E = 2$.
Si $a \neq \pm 1$, $\operatorname{rg} F = 3$; si $a = \pm 1$, $\operatorname{rg} F = 2$.
Si $a \neq 0$ i $a \neq 1$, $\operatorname{rg} G = 3$; si $a = 0, 1$, $\operatorname{rg} G = 2$.
Si $m \neq 5$, $\operatorname{rg} H = 3$; si $m = 5$, $\operatorname{rg} H = 2$.

8.8 Els costats d'un triangle medeixen 46, 36 i 30 cm. Prenem els vèrtexs com a centre i tracem tres circumferències tangents dues a dues. Quins són els radis de les circumferències?
Sol.- 10 cm, 20 cm i 26 cm.

8.9 Escriu un sistema lineal d'equacions respecte les variables x, y i z que tingui les solucions següents, on λ i μ són paràmetres reals, $(x, y, z) = (3 + 2\lambda - \mu,\ 2 + \lambda - 2\mu,\ 4 - \lambda + 3\mu)$.
Sol.- $x - 5y - 3z = -19$.

8.10 Escriu un sistema lineal d'equacions respecte les variables x, y i z que tingui les solucions següents, on λ és un paràmetre real, $(x, y, z) = (1 + 2\lambda,\ -2 + \lambda,\ 3 - \lambda)$.
Sol.- $x + 2z = 7$, $y + z = 1$.

8.11 Discuteix i resol els següents sistemes lineals d'equacions, segons els valors de $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{c} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 6z = -1 \end{array} \right. \qquad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{c} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{array} \right.$$

$$\text{(c)} \left\{ \begin{array}{c} 2x - y + z = 3 \\ x - 2y + 3z = 1 \\ 4x - 5y + 7z = 5 \end{array} \right. \qquad \text{(d)} \left\{ \begin{array}{c} x + 2y + z = 1 \\ -x + 2z = 3 \\ 3x + 2y + \lambda z = 1 \end{array} \right.$$

$$\text{(e)} \left\{ \begin{array}{c} -x + \lambda y + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x - 3z = -2 \end{array} \right. \qquad \text{(f)} \left\{ \begin{array}{c} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3y + z = 3 \\ x + 2y + 5z = \lambda \end{array} \right.$$

Solució.- (a) SCD $x = 6$, $y = -2$, $z = -5/2$.
(b) SCD $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$.
(c) SCI $(x, y, z) = (\mu, -8 + 5\mu, -5 + 3\mu)$, $\mu \in \mathbb{R}$.

(d) Si $\lambda \neq -3$ SCD $x = 3(1-\lambda)/(\lambda+3)$, $y = (2\lambda-3)/(\lambda+3)$, $z = 6/(\lambda+3)$; si $\lambda = -3$ SI.
(e) Si $\lambda \neq 1$ SCD $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$; si $\lambda = 1$ SCI $(x,y,z) = (2-3\mu, 4-4\mu, \mu)$, $\mu \in \mathbb{R}$.
(f) Si $\lambda \neq -1$ SI; si $\lambda = -1$ SCD $x = 4/3$, $y = 4/3$, $z = -1$.

Nota.- SCD denota sistema compatible i determinat,
SCI denota sistema compatible i indeterminat,
SI denota sistema incompatible.

8.12 La posició relativa de dos plans de $\mathbb{R}^3$ pot ser secants, paral·lels o coincidents. Determina la posició relativa de les següents parelles de plans de $\mathbb{R}^3$, segons els valors del paràmetre real k.

(a) $x+y-5z=-4$ i $3x-y+2z=k$,

(b) $x+y-5z=-4$ i $-3x-3y+15z=k$,

(c) $2x+ky+kz=0$ i $2x-y-z=0$.

Sol.- (a) secants per a tot k, (b) si $k \neq 12$ els plans són paral·lels i si $k = 12$ els plans són coincidents, (c) si $k \neq -1$ són secants i si $k = -1$ són coincidents.

8.13 Determina en quin conjunt de punts es tallen els següents conjunts de tres plans.

(a) $x+3y+2z=0$, $2x-y+z=0$, $4x-5y-3z=0$,

(b) $x+y+z=1$, $x-y=2$, $x+3y+2z=0$,

(c) $x+y-3z=2$, $2x+2y-6z=4$, $x+y+z=1$,

(d) $3x-y+z=1$, $x+3y-z=3$, $x+y+z=-1$.

Sol.- (a) es tallen en el punt $(0,0,0)$, (b) es tallen en la recta formada pels punts $(x,y,z) = (3/2-t, -1/2-t, 2t)$ on $t \in \mathbb{R}$, (c) no es tallen en cap punt ja que dos dels plans són paral·lels, (d) es tallen en el punt $(1,0,-2)$.

8.14 Determina el valor de k per a que els següents plans es tallin en una recta:

$$x+y+z=2,\ 2x+3y+z=3,\ kx+10y+4z=11.$$

Sol.- $k=7$.

Universitat de Lleida
Escola Politècnica Superior